LEHRBRIEFE FÜR DAS FERNSTUDIUM
HERAUSGEGEBEN
VON DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DRESDEN

ELEKTROPHYSIK

(THEORETISCHE ELEKTROTECHNIK)

9. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck

II. AUSGABE

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

9083 II/9

Lothar Schulze TG 3/68

ELEKTROPHYSIK

(THEORETISCHE ELEKTROTECHNIK)

9. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck 1969

II. AUSGABE

Nach der Vorlesung
von Prof. Dr. phil. (em.) Georg Mierdel

verfaßt für das Fernstudium
von Dr.-Ing. Edgar Drechsler

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN · 1969

VT-Bestell-Nr. 9 083 II/9 · Auflage 2700 Expl. · Veröffentlicht unter Ag 628/321/69/DDR
Verfaßt für das Direktorat für Weiterbildung der Technischen Universität Dresden · Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für das Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Technischen Universität Dresden · Verlag: VEB Verlag Technik, 102 Berlin
Im Offsetdruck hergestellt von dem VEB Druckerei „Thomas Müntzer", 582 Bad Langensalza

3. Kapitel: Stromleitung im Hochvakuum

[58] Einführung. Im Hochvakuum bildet der Elektronenstrom die einzige Möglichkeit zum Stromtransport, wenn man von hier nicht interessierenden Sonderfällen absieht. Ein Stromdurchgang durch das Vakuum ist deshalb nur dann möglich, wenn Elektronen von irgendeiner Katode emittiert werden. Derartige Katoden bestehen vielfach aus Metall, das durch verschiedene Effekte zur Elektronenemission veranlaßt werden kann. Mit modernen Mitteln läßt sich ein Vakuum nur bis zu etwa 10^{-11} Torr verwirklichen.
Obgleich die Konzentration der Gase bei diesen Drucken noch etwa 10^5 Molekeln je cm^3 beträgt, liegt nach der kinetischen Gastheorie die freie Weglänge bereits in der Größenordnung von 10^4 km, während die Abmessungen des evakuierten Gefäßes rund 10 cm betragen. Die Wahrscheinlichkeit des Zusammenstoßes der Elektronen oder Ladungsträger allgemein mit Gasmolekeln ist demnach so gering, daß sie vollkommen vernachlässigt werden kann. Die Bewegung der Träger vollzieht sich also bei Beachtung der jeweiligen Anfangsbedingungen nur unter dem Einfluß des Feldes. Wir werden in diesem Kapitel zunächst die Erzeugung von Ladungsträgern, insbesondere den Elektronenaustritt aus Metallen, und im Anschluß daran die Bewegung von Ladungsträgern im Hochvakuum besprechen.

[59] Der Austritt von Elektronen aus Metallen und Oxyden

1. Thermische Elektronenemission (Glühkatode):

a) Der Elektronenaustritt veranschaulicht am Schottkyschen Napfmodell: Die Elektronenemission durch Erhitzen eines Metalls ist das in seiner technischen Bedeutung weitaus überragendste Verfahren dieser Art. Betrachten wir zu ihrem näheren Verständnis noch einmal Bild 249. Wir sehen, daß bei steigender Temperatur des Metalls eine ständig wachsende Anzahl von Elektronen durch die beschriebene Auflockerung der Fermi-Verteilung imstande ist, die das Elektronengas im Metall von dem Außenraum (Vakuum) trennende Potentialbarriere (Napfrand) zu überwinden und damit aus dem Metall auszutreten. Die Betrachtung von Bild 249 (S. 461) lehrt, daß nur diejenigen Elektronen den Potentialwall der Höhe $U_a + U_F$

überwinden und aus dem Metall austreten können, die eine Geschwindigkeitskomponente ξ senkrecht zur Wand haben, die der Beziehung

$$\frac{m}{2}\xi^2 \leq q\,(U_a + U_F) \tag{594a}$$

genügt. Dadurch wird also eine untere Grenze für ξ festgelegt:

$$\xi_o = \sqrt{\frac{2q}{m}\,(U_a + U_F)} \tag{594b}$$

U_a ist dabei das Voltäquivalent der Austrittsarbeit und $U_F = \mu$ das der Fermikante.

b) Die Emissionsformel (Richardsonsches Gesetz): Die Gesamtzahl der Elektronen, für die (594b) erfüllt ist, bezogen auf die Zeit- und Flächeneinheit (der Metalloberfläche), ergibt dann unter Zugrundelegung der Fermi-Verteilung die Dichte des thermischen Elektronenstromes (Sättigungsstrom!):

$$G = 2q\left(\frac{m}{h}\right)^3 \int_{\xi_o}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{1 + e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{595}$$

Setzt man

$$\varepsilon = \frac{m}{2}\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

und berücksichtigt (594b), so erhält man nach Ausführung der Integration:

$$G = \frac{4\pi q m}{h^3}\,(kT)^2\, e^{-\frac{qU_a}{kT}} \tag{596}$$

Vergleicht man (596) mit der von Richardson aufgestellten Emissionsformel

$$G = A\,T^2\, e^{-\frac{b}{T}}\,, \tag{597}$$

so ergibt sich volle Übereinstimmung, wenn man für die dort auftretenden konstanten Faktoren

$$A = \frac{4\pi q m k^2}{h^3} \tag{598a}$$

und

$$b = \frac{q}{k} U_a \tag{599a}$$

setzt. Bei der Einführung der Zahlenwerte

$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As (Ladung des Elektrons)

$m = 0{,}911 \cdot 10^{-30}$ $\frac{Ws^3}{m^2}$ (Masse des Elektrons)

$k = 1{,}380 \cdot 10^{-23}$ $\frac{Ws}{grad}$ (Boltzmannsche Konstante)

$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Ws^2 (Plancksches Wirkungsquantum)

folgt

$$A = 120 \cdot 10^4 \frac{A}{m^2 grad^2} = 120 \frac{A}{cm^2 grad^2} \tag{598b}$$

und

$$b = 1{,}16 \cdot 10^4 \frac{grad}{Volt} \cdot U_a \tag{599b}$$

Die Ableitung der Emissionsformel auf der Basis der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung - wie sie zunächst auch von Richardson durchgeführt wurde - ergibt anstelle von T^2 den Faktor $\sqrt{T}$. Eine experimentelle Entscheidung zwischen beiden Faktoren ist infolge der mit erheblichen Schwierigkeiten verbundenen Temperaturmessungen sehr erschwert. Wir verwenden im folgenden ausschließlich die auf sicherer theoretischer Basis stehenden Formeln (596) bzw. (597). Aus ihnen folgt zunächst ein recht genaues Verfahren zur experimentellen Bestimmung der Emissionsdaten A und b.

c) Experimentelle Ermittlung der Konstanten A und b: Logarithmiert man Gl. (597), so ergibt sich

$$\lg G - 2 \lg T = \lg A - \frac{b}{T} \lg e$$

Setzen wir $y = \lg G - 2 \lg T$, $\alpha = \lg A$ und $\beta = b \lg e$, dann läßt sich dafür die Geradengleichung

$$y = \alpha - \beta \cdot \frac{1}{T} \tag{600}$$

angeben. Man bezeichnet die durch (600) gegebenen Kurven $y = f(\frac{1}{T})$ als Richardsonsche Geraden. Da die Temperatur T empfindlich in den Emissionsstrom eingeht, dürfen zur Messung des letzteren nur diejenigen Stellen der Katode, z.B. eines Glühdrahtes, benutzt werden, die eine einheitliche Temperatur aufweisen. Die der Drahtbefestigung benachbarten Teile sind durch Schutzzylinder abzuschirmen, wie Bild 254a zeigt. Abgesehen von einzelnen Streuwerten geben derartige Messungen auch durchweg Geraden, die dann - bis an die Ordinatenachse verlängert - den gesuchten Wert $\alpha = \lg A$ ergeben (vgl. Bild 254b).

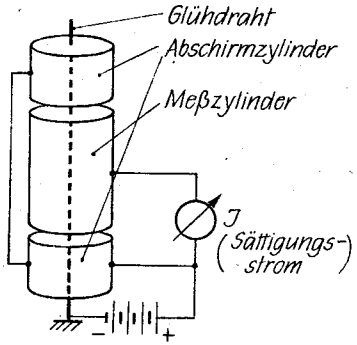


Bild 254a
Anordnung zur Messung der Glühemission von Metalldrähten

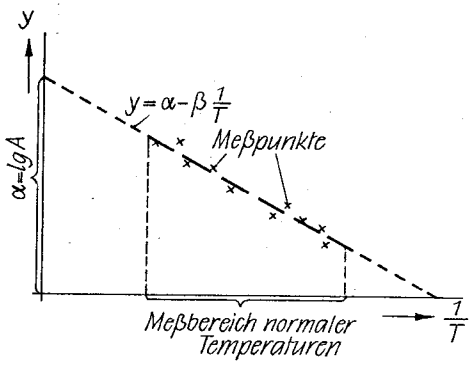


Bild 254b
Zur experimentellen Bestimmung der Konstanten A und b

Die Konstante A besitzt für reine Metalloberflächen Werte zwischen 65 und 120 $A/cm^2\ grad^2$. Die Quantentheorie verlangt als oberen Grenzwert, d.h. bei Außerachtlassung der Reflexion von Elektronen an der Grenzschicht, gemäß (598b) den Wert
$A = 120\ A/cm^2\ grad^2$.
Je nach der Art des emittierenden Materials ist die Austrittsarbeit (im Volt-Maß) U_a verschieden. Sie läßt sich sofort aus der Neigung der Richardsonschen Geraden bestimmen, denn es ist

$$\frac{dy}{d(\frac{1}{T})} = \beta = b \lg e = \frac{-q\ U_a \lg e}{k}$$

Tafel 4 gibt die so ermittelte Austrittsarbeit einiger technisch wichtiger Metalle an [1].

Tafel 4

Gemessene U_a-Werte für verschiedene Metalle

Material	Cs	Ba	Na	Th	W	Pt
U_a[V]	0,7	1,6	1,8	3,0...3,3	4,52	6,3

Mit diesen Werten läßt sich nun ohne weiteres auch der in der Emissionsformel auftretende Faktor b (Gl. 599) berechnen.
Aus Tafel 4 ist auch ersichtlich, daß U_a bei den edleren Metallen größer ist. Trotz seiner hohen Austrittsarbeit verwendet man in der Praxis von reinen Metallen nur Wolfram, da der hohe Schmelzpunkt (3600°K) eine hohe thermische Beanspruchung erlaubt.

d) Der Schottky-Effekt: Wird die Feldstärke an der Katode sehr groß, wie es beispielsweise an dünnen Drähten bei nicht zu kleinen Spannungen der Fall ist, so vermindert sich die Austrittsarbeit U_a des Katodenmaterials, und gemäß (596) steigt der Emissionsstrom an.

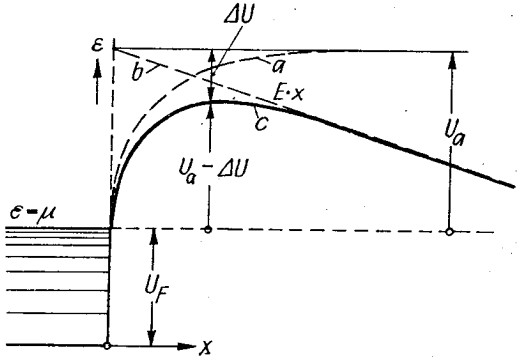


Bild 255
Zur Erklärung der Herabsetzung der Austrittsarbeit durch hohe Feldstärken

Man bezeichnet diese Erscheinung als Schottky-Effekt. Seine Deutung ist anhand des Schottkyschen Napfmodells anschaulich möglich:
Das durch den Napfrand gegebene Potential (Bild 255, Kurve a) überlagert sich dem vom äußeren Feld E (Anodenfeld) herrührenden Potential Ex (Bild 255, Kurve b) und ergibt als resultierenden Potentialverlauf die

1) Die Austrittsarbeit U_a ist nicht mit der Ionisierungsarbeit zu verwechseln. Während letztere zur Loslösung eines Elektrons von nur einem Atom erforderlich ist, wird die erstere dagegen zur Loslösung eines Elektrons aus einem Atomverband (Metall) nötig.

Kurve c. Der Napfrand a wird also so deformiert, daß die Elektronen beim Austritt nur noch die Potentialschwelle $U_a - \Delta U$ vorfinden. Die Austrittsarbeit U_a wird also um einen Betrag ΔU herabgesetzt. Zur Berechnung von ΔU muß eine Annahme über den Potentialverlauf a (Napfrandform) gemacht werden. Man rechnet zweckmäßig mit der Bildkraft, das ist die Kraft zwischen dem aus dem Metall austretenden Elektron und seiner Influenz- bzw. Spiegelladung im Metall. Es folgt dann für die Verminderung der Austrittsarbeit

$$\Delta U = \sqrt{\frac{Eq}{4\pi\varepsilon_o}} \sim \sqrt{E} \qquad (601)$$

Ein Feld von z.B. $E = 10^8$ V/m = 1 MV/cm setzt also die Austrittsarbeit bereits um

$$\Delta U = \sqrt{\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As} \cdot 10^{8}\,\text{V/m}}{4\pi \cdot 0{,}886 \cdot 10^{-11}\,\text{As/Vm}}} = 0{,}38\ \text{V}$$

herab. Wegen der Empfindlichkeit, mit der U_a in die Richardsonsche Gleichung eingeht, kann der Emissionsstrom so stark anwachsen, daß mitunter eine Sättigung in der Kennlinie von Glühelektronenströmen namentlich an dünnen Katodendrähten nicht in Erscheinung tritt.

Zur Veranschaulichung der Größenordnung thermischer Elektronenströme bringen wir in Bild 256 eine Darstellung des Temperaturverlaufes der Sättigungsstromdichte G für die in der Vakuumröhrentechnik üblichen Katodenwerkstoffe. Die technisch wichtigen Temperaturbereiche sind jeweils durch größere Strichstärke der Kurven gekennzeichnet. Wie man sieht, treten größenordnungsmäßig Unter-

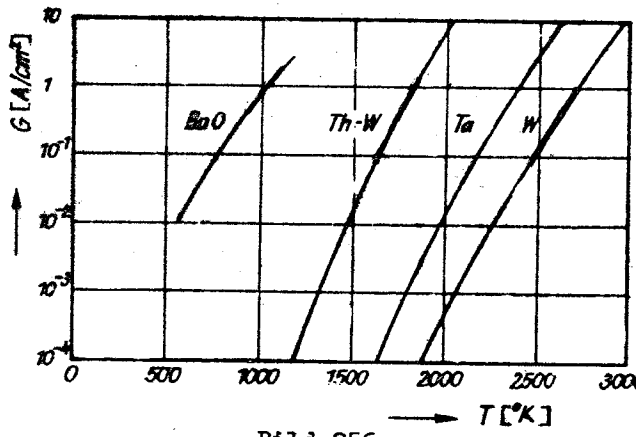


Bild 256
Emissionsstromdichten von Glühkatoden aus Wolfram (W), Tantal (Ta), thoriertem Wolfram (Th-W) und Bariumoxyd (BaO)

schiede in der Emission auf. Eine besonders hohe Emission zeigen die in der Vakuumröhrentechnik viel verwendeten zusammengesetzten Katoden. Diese bestehen nicht aus einer chemisch einheitlichen Substanz, sondern aus einem metallischen Träger und einer darüber aufgebrachten Fremdschicht, wie z.B. Oxydkatoden und mit Thoriumzusatz versehene Wolframdrähte.

e) Die technische Entwicklung der Glühkatode: Ziel der Entwicklung ist eine maximale Elektronenstrom-Ausbeute bei hinsichtlich der Heizleistung und Lebensdauer wirtschaftlichen Katodentemperaturen. Die Richardsonsche Gleichung

$$G = AT^2 \, e^{-q \frac{U_a}{kT}}$$

eröffnet hierfür zwei Wege, nämlich einmal die Vergrößerung der Konstanten A durch weitestgehende Vermeidung von Elektronen-Reflexionen und zum anderen die Herabsetzung der Austrittsarbeit U_a. Dabei ist die Verminderung der Austrittsarbeit weitaus wirksamer, da U_a in die Richardson-Gleichung als Exponent eingeht. Als technische Ideallösung ist schließlich eine Kombination der genannten beiden Möglichkeiten anzustreben.

α) Wolframkatoden: Nach Tafel 4 besitzt Wolfram mit $U_a = 4{,}52$ V eine relativ hohe Austrittsarbeit, so daß bei erträglicher Stromausbeute für reine Wolframkatoden ziemlich hohe Temperaturen erforderlich sind. Sie betragen gemäß Bild 256 für 1 A/cm^2 2700°K. Für die Eignung von reinem Wolfram als Glühkatodenmaterial ist nicht nur sein hoher Schmelzpunkt maßgebend, sondern auch seine hohe mechanische Festigkeit und geringe Verdampfung bei Betriebstemperatur. Diese günstigen thermischen Eigenschaften machen das Wolfram ferner als Träger von Schichtkatoden geeignet, bei denen die emittierende Oberfläche durch Aufbringen von Fremdschichten eine verminderte Austrittsarbeit erhält. Den ersten Erfolg in dieser Richtung brachte die thorierte Wolframkatode:
Durch Bedeckung der Wolframoberfläche mit einer einatomaren Schicht Thorium wird die Austrittsarbeit von 4,52 V auf 2,6 V vermindert. Die Fremdatome Th werden als Ionen an der Metallfläche adsorbiert, wobei sie ein Elektron an das Trägermetall abgeben.

Die thorierte Wolframkatode findet in Hochvakuumröhren vielfach Verwendung. Ihre Herstellung und Formierung verläuft folgender-

maßen: Man geht von Wolfram aus, das 1 bis 2 % Th als Oxyd (ThO_2) enthält. Durch Erhitzen auf etwa 2600°K wird das letztere reduziert, und das Thorium wandert zur Oberfläche, wo es verdampft. Durch Absenken der Temperatur auf etwa 2100°K wird nunmehr die Verdampfung soweit reduziert, daß sich Thorium an der Oberfläche anreichert (Aktivierung) und eine wahrscheinlich monoatomare Oberflächenschicht entsteht. Die Emission von thorierten Wolframkatoden richtet sich nach der Austrittsarbeit der Thoriumschicht anstelle des Wolframs. Wäre also in beiden Fällen die A-Konstante der Richardson-Gleichung dieselbe, so müßte sich die gleiche Emissionsstromdichte, z.B. 1 A/cm^2, bei Temperaturen erzielen lassen, die sich wie die Austrittsarbeiten verhalten. (Dabei ist allerdings der Faktor T^2 nicht berücksichtigt, was wegen des überwiegenden Einflusses der e-Funktion auf den Temperaturgang zulässig ist.) Das Verhältnis der U_a-Werte ist im vorliegendem Fall

$$\frac{U_{a\ W}}{U_{a\ Th}} = \frac{4{,}52\ V}{2{,}6\ V} = 1{,}74$$

Dementsprechend könnte die Temperatur der Th-W-Katode von 2700° K auf

$$T_{Th\text{-}W} = \frac{2700°\ K}{1{,}74} \approx 1550°\ K$$

herabgesetzt werden. Ein Vergleich mit praktisch ermittelten Temperaturwerten (Bild 256) zeigt jedoch für thoriertes Wolfram eine höhere Arbeitstemperatur, nämlich rund 1800° K bei Emissionsstromdichten von 1 A/cm^2. Die Ursache dafür ist, daß die Konstante A bei zusammengesetzten Katoden den quantentheoretisch ermittelten Grenzwert von 120 $A/cm^2\ grad^2$ bei weitem nicht erreicht, während ihm reines Wolfram auf ca. 50 % nahe kommt. Aus Messungen folgt für Th-W-Katoden A ≈ 3 $A/cm^2 grad^2$, so daß bei gleicher Stromausbeute die Arbeitstemperatur dem obigen Wert entsprechend zu erhöhen ist.

Die dünne Th-Schicht auf dem Wolfram ist natürlich sehr empfindlich. Sie verdampft schnell durch kurzzeitige Überhitzung der Katode oder wird durch ein zufälliges Bombardement mit positiven Ionen (bei schlechtem Vakuum!) leicht abgetrommelt. Als Folge davon ergeben sich schwankende Emissionsstromdichten, die eine prak-

tische Verwendung thorierter Wolframkatoden erheblich einschränken.

β) Oxydkatoden: Diese besitzen auf Grund ihrer hohen Stromausbeute größte praktische Bedeutung. Der technisch hervorragendste Vertreter dieser Art ist die Barium-Oxydkatode, die gemäß Bild 257 aus vier Schichten aufgebaut ist:

Schicht a: Trägermetall, zumeist aus Nickel(mitunter auch W) bestehend, das jedoch noch geringe Verunreinigung (Si) aufweisen kann.

Schicht b: Zwischenschicht, die anfangs etwa 1μ dick ist, im Laufe der Betriebszeit aber bis auf das 10fache anwachsen kann. Sie entsteht durch chemische Reaktionen der folgenden Oxydschicht mit dem Trägermetall oder mit dessen Verunreinigungen.

Schicht c: Haupt- oder Oxydschicht, 20 ... 200 μ stark, bestehend aus Ba-Sr-O-Mischkristallen.

Schicht d: Hypotetische, monoatomare Schicht, aus anhängenden Ba-Atomen bestehend.

Wesentlich für das Funktionieren der Ba-Oxydkatode ist, daß das Oxyd (Schicht c) nicht chemisch rein, sondern mit einem stöchiometrischen Überschuß von Ba versehen sein muß. Ein Teil dieses Bariums lagert sich an der Oberfläche als neutrale Atome an besonders dazu geeigneten aktivierten Stellen an. Die Ba-Atome geben unter der Einwirkung der Wärmeenergie Elektronen an das Vakuum ab und werden dadurch zu Ionen. Der andere Teil verbleibt als atomar verteilte Störstellen im Kristallgitter des Isolators (Oxydschicht) und ermöglicht so den kontinuierlichen Ersatz der an der Oberfläche emittierten Elektronen durch Störstellenleitung. Der Ba-Überschuß des Oxyds wird durch einen besonderen Aktivierungsvorgang erzeugt: Nach Erhitzen der Katode zum Zwecke der Umwandlung aller Ba-Verbindungen in das Ba-Oxyd (Formierung), wird sie im Vakuum auf etwa 1200° K aufgeheizt und dann der sogenannten „Aktivierung" unterzogen. Diese besteht darin, daß mit Hilfe einer passenden Anodenspannung ein von kleinen Werten an allmählich

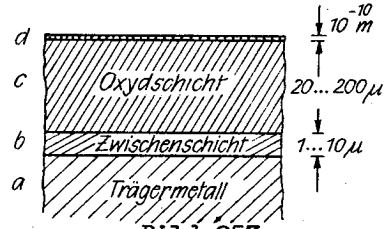


Bild 257
Schematischer Aufbau einer Oxydkatode

steigender Emissionsstrom aus der Katode gezogen wird, bis etwa der dreifache Wert des für den Gebrauch vorgesehenen Stromes, des Nennstromes, erreicht ist. Der Aktivierungsstrom fließt quer durch die Oxydschicht und bewirkt in ihr die teilweise elektrolytische Zersetzung des BaO: Die positiv geladenen Ba-Atome wandern zur Katode (Ni), reichern sich dort an, diffundieren dann aber nach ihrer Neutralisation zurück und verteilen sich über die ganze Schicht c. Die negativ geladenen O-Ionen wandern in Richtung Anode, treten an der Oberfläche der Katode ins Freie und werden abgepumpt bzw. gegettert.

Der Mechanismus der Emission an Oxydkatoden ist noch keineswegs klargestellt. Er hängt sicher mit der Physik der Halbleiter zusammen, und zwar betrifft er naturgemäß die Verhältnisse an der Oberfläche von Halbleitern, die jedoch noch sehr wenig bekannt sind.

Ein Nachteil der Oxydkatoden ist die Begrenzung ihrer Lebensdauer infolge des Abdampfens von Barium. Man entwickelte deshalb Katoden mit einem Vorrat an Ba-Atomen, die sogenannten Vorratskatoden. Die Oxydmasse (Schicht c) ist dort nicht nur als dünne Schicht vorhanden, sondern als kompakter Körper, von dem die eigentliche aktive Schicht ihr verdampftes Barium stets wieder ersetzen kann. Auch die Th-W-Katode ist in diesem Sinne eine Vorratskatode: Der W-Körper, der nicht zur Emission beiträgt, enthält etwa 2 % Th in Form von ThO_2. Aus diesem Vorrat wird das an der Oberfläche verdampfende oder abgetrommelte Th ersetzt.

In Magnetronen z.B. verwendet man Vorratskatoden in der Form, daß auf ein Nickelrohr außen Nickelpulver aufgesintert wird. Dieses schwammartige Gebilde tränkt man mit einer Ba-Sr-Karbonat-Suspension, die im Vakuum durch Erhitzen in Oxyd verwandelt wird. Derartige Katodenformen haben eine sehr gute Leitfähigkeit (kleinen Querwiderstand), da ja in der Oxydmasse Nickelteilchen eingebettet sind.

Die technisch reifste Lösung ist die nach dem Erfinder Lemmens benannte L-Katode (Bild 258). V ist der Vorrat an Oxydmasse, der durch eine poröse gesinterte Wolfram-Platte (W-Schwamm) abgeschlossen ist. H ist die Heizwendel. Die Ba-Atome werden am Wolfram adhäriert und setzen dessen Austrittsarbeit wie bei der Th-W-Katode herab. Der Oxydkörper sorgt ständig für den Ersatz des abdamp-

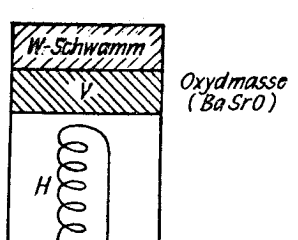


Bild 258
Schematischer Aufbau einer L-Katode

fenden Ba. Dieses diffundiert dabei über die Wolframoberflächen der Poren hin und gelangt schließlich bis zur Katodenoberfläche, die der Anode zugekehrt ist und Elektronen emittiert.

γ) Keramikkatoden: Da Glühkatoden einen hohen Schmelzpunkt verlangen, empfiehlt sich die Herstellung von Keramikkatoden aus gesintertem Material. So verwendet man speziell für Magnetrons mit Erfolg die ThO_2-Katode. Der Schmelzpunkt des Th-Oxyds liegt über 2800°C. Die Heizung der Katode geschieht indirekt durch eine Wolframwendel. Die Emission der ThO_2-Katode beträgt im Dauerbetrieb 4 A/cm^2 bei 1600°C. Bei mäßiger Verdampfung lassen sich sogar Temperaturen bis um 1800°C erreichen, so daß die Emissionsstromdichte bis auf 14 A/cm^2 ansteigt.

Keramikkatoden sind ohne vorhergehende Aktivierung emissionsfähig. Sie vertragen starke Ionen-Bombardements und hohe Feldstärken, ohne Funkenentladung zu zeigen. Hohe Feldstärken treten bei normalen Oxydkatoden als Störung auf, wenn diese durch den Stromkreis zu hoch belastet werden. Das hohe Feld erzwingt dann die der Belastung entsprechende Emission, wobei an bevorzugten Stellen (Spitzen) lokale Erhitzungen auftreten, so daß der Vorgang instabil wird. Es bildet sich ein kleiner Lichtbogen aus, der an den betroffenen Stellen die Schicht zumeist unter Abspritzen von Oxydmasse zerstört. Diese allmählich zur Zerstörung der Oxydkatode führende Erscheinung nennt man „Spratzen". Die technische Entwicklung der Keramikkatoden ist noch nicht abgeschlossen. So sind z.B. noch Versuche mit Karbiden, Boriden, Nitriden - die sämtliche einen hohen Schmelzpunkt aufweisen - im Gange. Auch die theoretische Erforschung dieser Art Glühkatoden ist bisher noch zu keinem Abschluß gebracht worden.

δ) Zusammenstellung der gebräulichsten Glühkatoden-Werkstoffe

In Tafel 5 sind zur Orientierung die Konstante A, die Austrittsarbeit U_a und die Arbeitstemperatur T_{arb} für die technisch wichtigsten Katoden angegeben.

System	Tafel 5		
	A	U_a	T_{arb}
	A/cm^2grad^2	Volt	^oK
W	60	4,52	2600
Th-W	3,0	2,6	2000
Ba-W	2,0	1,6	1400
Cs-W	3,2	1,4	1400
(Ba+Sr)O	0,1 ... 1	1,0 ... 1,2	1000

2. Feldemission ("Kalte" Emission):

a) Grundsätzliches: Existiert an der Oberfläche einer kalten Katode ein sehr starkes elektrisches Feld, so tritt eine neue Art der Elektronenemission zutage. Die zu dieser Art Emission erforderliche Mindestfeldstärke liegt in der Größenordnung von 10^7 V/cm. Sie läßt sich an feinen Drähten oder Spitzen ohne besonderen Aufwand an Spannung herstellen. Infolge der Unkenntnis der wahren Oberflächenstruktur bereitet allerdings die Berechnung derartiger Feldstärken erhebliche Schwierigkeiten. Trägt man die Stromausbeute G in Abhängigkeit von der an der Katode herrschenden Feldstärke E_K auf, so ergibt sich qualitativ ein Verlauf entsprechend Bild 259. Eine solche Kennlinie zerfällt in die angegebenen 4 Bereiche, von denen nur die ersten drei temperaturabhängig sind. Charakteristisch für die Feldemission sind also außerordentlich hohe Stromdichten. Der rasche Anstieg von G kann nicht mehr als

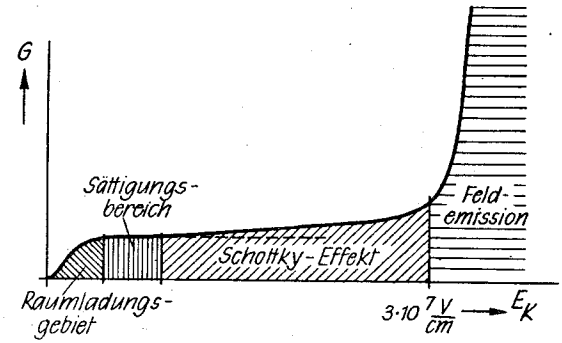


Bild 259
Verlauf der Emissionsstromdichte in Abhängigkeit von der an der Katode herrschenden Feldstärke

eine Art Schottky-Effekt erklärt werden [1]. Es muß vielmehr ein grundsätzlich neuer theoretischer Gesichtspunkt, nämlich der unter [54] besprochene Dualismus „Korpuskel-Welle", zu seiner Deutung herangezogen werden.

b) Der Tunneleffekt: Dieser Effekt ist eine aus der Wellennatur des Elektrons zu ziehende Folgerung. Betrachten wir dazu noch einmal das unter [56] 8. erläuterte Schottkysche Napfmodell des Potentialsverlaufes an einer metallischen Grenzfläche (Bild 260). Der Verlauf des Potentials, abhängig von der Entfernung x (Abstand von der Metallgrenze), ist im feldfreien Fall durch die Kurve a gegeben. Die Austrittsarbeit wird durch die Länge der Strecke U_a dargestellt. U_F entspricht wiederum der Grenzenergie der Fermi-Verteilung. Die den „Napf" bis zur Höhe U_F anfüllenden Elektronen müssen jeweils noch um U_a angehoben werden, um über den Potentialwall hinweg ins Freie zu gelangen. Wird jetzt ein starkes äußeres Feld E dem Potentialverlauf überlagert, so verbiegt sich der Napfrand in der durch Kurve b skizzierten Weise. Dadurch wird, abgesehen von der schon früher behandelten Absenkung der Austrittsarbeit um den Betrag ΔU, der sich wieder nach Gl. (601) berechnet, der Potentialwall so schmal gemacht, daß der im folgenden

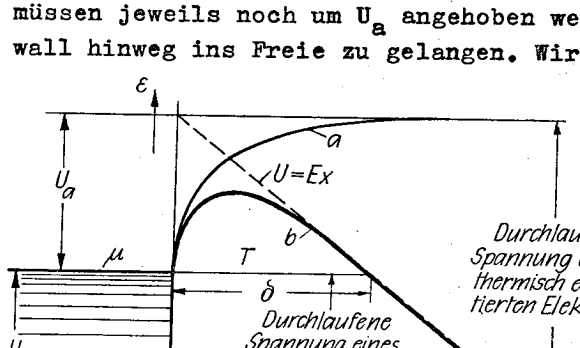


Bild 260
Erklärung der Feldemission aus dem Potentialverlauf an der Metalloberfläche

1) Beispiel: Gegeben sei eine Wolframkatode bei Zimmertemperatur ($T = 300^{\circ}K$) und $E_K = 10^{10}$ V/m. Nach Gl. (601) wird die Austrittsarbeit um

$$\Delta U = \sqrt{\frac{q\,E}{4\pi\varepsilon_0}} = 3{,}8\ \text{V}$$

herabgesetzt. Wir müssen also mit einer effektiven Austrittsarbeit von $U_a = (4{,}5 - 3{,}8)\text{V} = 0{,}7$ V rechnen. Nach Gl. (596) ergibt dieser Wert bei $T = 300^{\circ}$ K eine thermische Emission von $G = 16 \cdot 10^{-6}\,\text{A/cm}^2$. Praktische Messungen führten dagegen bei den vorgegebenen Daten zu einem Wert von etwa $G = 2 \cdot 10^{7}\,\text{A/cm}^2$!

beschriebene sogenannte „Tunneleffekt" eintritt: Für die im Metall enthaltenen Leitungselektronen besteht wegen der stark verringerten Breite des Potentialwalles eine endliche, wellenmechanisch angebbare Wahrscheinlichkeit dafür, den Potentialwall durch den Tunnel T zu durchdringen und so ohne zusätzlich aufzuwendende Austrittsarbeit ins Freie zu gelangen. Die austretenden Feldelektronen unterscheiden sich also grundsätzlich von allen durch früher beschriebene Mechanismen ausgelösten Elektronen dadurch, daß sie eine um die Austrittsarbeit U_a verringerte kinetische Energie besitzen. Vom Standpunkt der Wellennatur des Elektrons aus ist der beschriebene Tunneleffekt vollkommen analog einer aus der Wellenoptik bekannten Erscheinung: Bei der Totalreflexion von Licht kann nämlich ein merklicher Bruchteil der auffallenden Strahlung das optisch dünnere Medium passieren, wenn dieses nur eine Schichtstärke vergleichbar mit der Wellenlänge λ des benutzten Lichtes besitzt. Die hindurchtretende Lichtmenge steigt dann bei kleiner werdender Schichtdicke sehr rasch an.
Durch eine ganz einfache Betrachtung läßt sich der Nachweis führen, daß bei Feldstärken von etwa $3 \cdot 10^9$V/m die Breite des Potentialberges - also die Länge des Tunnels - tatsächlich nur einige wenige De Broglie-Wellenlängen der Elektronen umfaßt:
Nach Bild 260 ist die Dicke δ des Potentialwalles gegeben durch

$$\delta = \frac{U_a}{E}$$

Für eine Feldstärke $E = 3 \cdot 10^9$V/m und eine Austrittsarbeit $U_a = 5$V wird also

$$\delta = 1{,}7 \cdot 10^{-9}\ \text{m}$$

Andererseits ergibt sich für die Wellenlänge λ des austretenden Elektrons nach De-Broglie

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Die Größe v ist die der Fermi-Kante U_F entsprechende Geschwindigkeit, sie errechnet sich aus der kinetischen Energie des Elektrons zu

$$v = \sqrt{\frac{2q\ U_F}{m}} \qquad (602)$$

Greifen wir für U_F aus Tafel 6 einen durchschnittlichen Wert von

Tafel 6

Grenzenergien der Fermi-Verteilung

Metall	Wo	Ta	Pt	Ni	Cu	Hg
U_F [V]	5,71	5,20	5,88	7,23	6,92	4,26

6 Volt heraus, so wird

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2mq\ U_F}} = \sqrt{\frac{1{,}50 \cdot 10^{-18}}{U_F}} = 0{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{m} = 0{,}5\ \text{nm}$$

Die Wellenlänge λ des Elektrons ist also durchaus vergleichbar mit der oben ermittelten Dicke δ des Potentialwalles, und wir können daher in Analogie zur Optik mit einem merklichen Durchgang von Elektronen durch den Tunnel rechnen. Das Erscheinen von Elektronen außerhalb des Metalles steht nicht im Widerspruch zum Energieprinzip, denn die Gesamtenergie der Elektronen zu beiden Seiten des Tunnels ist die gleiche.

c) Die Fowler-Nordheimsche Emissionsformel: Mit Hilfe der wellenmechanisch gegebenen Durchdringungswahrscheinlichkeit und der Fermi-Verteilung läßt sich ein Ausdruck für die Stromdichte G in Abhängigkeit von der Feldstärke E angeben, wenn man den Feldverlauf vor der Katode idealisiert. Bei Annahme eines dreieckigen Potentialverlaufs (gestrichelte Linie in Bild 260) errechneten Fowler und Nordheim den Ausdruck

$$G = \frac{q^2}{8\pi h} \frac{E^2}{U_a} e^{-\frac{4}{3} \varkappa \frac{U_a^{3/2}}{E}} \qquad (603a)$$

Die im Exponenten von (603a) stehende Konstante $\varkappa$ ist gegeben durch

$$\varkappa = \frac{\pi}{h} \sqrt{8\ qm} \qquad (m = \text{Elektronenmasse})$$

Setzen wir für q, h und $\varkappa$ die bekannten Zahlenwerte ein, so lautet Gl. (603a):

$$G = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \frac{E^2}{U_a} e^{-6{,}8 \cdot 10^7 \frac{U_a^{3/2}}{E}} \left[\text{A/cm}^2\right] \qquad (603b)$$

Hierin sind U_a und E in V bzw. V/cm zu messen. Eine überschlägige Rechnung zeigt in der Tat, daß ein merklicher Emissionsstrom erst bei Feldstärken oberhalb einiger 10^7V/cm einsetzt, dann aber infolge der e-Funktion außerordentlich schnell mit der Feldstärke ansteigt. Tafel 7 veranschaulicht anhand einiger Wertepaare von E und G diesen raschen Anstieg bei einer W-Katode (U_a = 4,52 V).

Tafel 7

E [V/cm]	10^7	$3 \cdot 10^7$	10^8	$3 \cdot 10^8$	10^9
G [A/cm^2]	$0{,}2 \cdot 10^{-20}$	0,1	$5 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^{11}$

Die experimentelle Prüfung der Fowler-Nordheimschen Formel bereitet in mehrfacher Hinsicht Schwierigkeiten. Da es praktisch nicht möglich ist, zwischen ebenen Platten die geforderten hohen Feldstärken zu erzeugen, können nur dünne Drähte und Spitzen als Katoden verwendet werden. Die Oberfläche derartiger Katoden und ihr Einfluß auf die Feldgestaltung ist natürlich schwierig zu beurteilen, denn mikroskopisch kleine Spitzen und Höcker verstärken das Feld und täuschen so eine kleinere Anfangsfeldstärke vor. So galt früher als Mindestwert der Feldstärke beim Einsetzen der Feldemission $E \approx 10^6$ V/cm, während man durch genaue Untersuchung der Elektrodenform mit dem Elektronenmikroskop in Übereinstimmung mit der Theorie die Anfangsfeldstärke neuerdings einwandfrei zu $E \cong 3 \cdot 10^7$ V/cm ermittelt hat.

Da die Formel (603) die Stromdichte angibt, jedoch die Stromstärke direkt gemessen wird, liegt eine weitere Unsicherheit in der Beurteilung der emittierenden Fläche. Trotzdem kann man heute sagen, daß sich die Fowler-Nordheimsche Formel in den Grenzen der Meßgenauigkeit gut bestätigt hat.

d) Grundsätzliche Unterscheidungsmerkmale zwischen Feldemission und thermischer Emission: Feldemission und glühelektrische Emission unterscheiden sich wesentlich in energetischer Hinsicht. Das thermisch emittierte Elektron hat beim Austritt aus der Katode das Potential 0 - s. Bild 260: der Potentialverlauf im Vakuum (Kurve a) strebt dem Wert 0 zu - und hat daher nach Erreichen

der Anodenoberfläche die volle Anodenspannung U_A durchlaufen. Es erreicht also die Anode mit der kinetischen Energie $q \cdot U_A$. Das Feldelektron dagegen besitzt nach seinem Durchgang durch den Tunnel das Potential U_a (= Austrittsarbeit), entsprechend dem Ferminiveau μ (s. Bild 260). Ihm steht bis zum Eintreffen auf der Anode nur eine durchfallene Spannungsdifferenz $U_A - U_a$ zur Verfügung, es erreicht daher die Anode mit der kinetischen Energie $q\ (U_A - U_a)$, die also um das Äquivalent der Austrittsarbeit $q \cdot U_a$ niedriger ist als beim thermischen Elektron. Dabei ist allerdings stillschweigend vorausgesetzt, daß die kinetische Energie der Elektronen im Vakuum unmittelbar nach erfolgtem Austritt aus dem Metall in beiden Fällen die gleiche ist. Das ist, wie sich zeigen läßt, tatsächlich der Fall. Wir begnügen uns zur näheren Begründung mit dem Hinweis darauf, daß auch in der idealen, d.h. isothermischen Atmosphäre die mittlere kinetische Energie der Molekeln unabhängig von der Höhe h stets die gleiche ist, nur ihre Dichte nimmt mit h nach der Barometerformel (Boltzmann-Verteilung) rasch ab.

Bei der Glühemission muß die Katode den Elektronen die zur Überwindung des Potentialwalles nötige Austrittsenergie zuführen. Diese kann aber nur der Heizleistung entstammen. Bei der Feldemission erfolgt dagegen die Elektronenlieferung ohne Energieeinbuße. Im ersten Fall erfolgt deshalb eine tatsächlich beobachtete geringe Abkühlung der Katode durch Stromentnahme, im zweiten Falle dagegen nicht.

e) Praktische Anwendung der Feldemission: Eine interssante Anwendung der Feldemission ist das von E.W. Müller entwickelte Feld-Elektronenmikroskop. Es dient zur Untersuchung der Oberflächenstruktur von Metallspitzen. Eine Metallspitze mit dem Radius etwa $R = 10^{-5}$cm steht im Mittelpunkt einer evakuierten Kugel von rund 10 cm Radius, deren Innenwand mit Leuchtmasse versehen ist (Bild 261). Zwischen der Spitze als Katode und einer irgendwo an der Innenwand befindlichen Anode liegt eine Spannung von etwa 3000 V. Das Feld an der Spitze hat einen Wert von rund $3 \cdot 10^7$V/cm, so daß eine Feldemission schon merkbar ist (meßbarer Strom etwa 10 bis 20 μA).

Da die Elektronen bereits dicht an der Katode praktisch die volle Spannung erhalten, laufen sie <u>geradlinig radial nach außen</u> und bilden so die Emissionsstruktur der Spitzenoberfläche als Fluoreszenzbild ab. Wegen der Steifigkeit der Strahlen sind fokussierende Elemente nicht mehr nötig. Die Vergrößerung beträgt etwa $\nu = 10^6$.

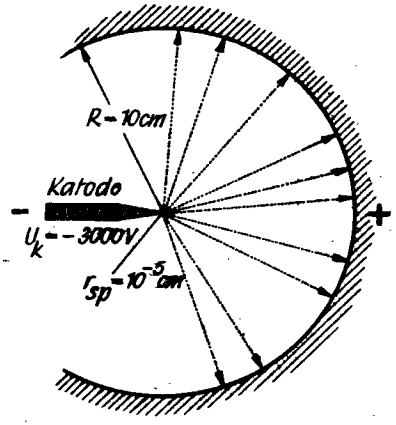


Bild 261
Schematischer Aufbau des von E.W. Müller entwickelten Feld-Elektronenmikroskopes

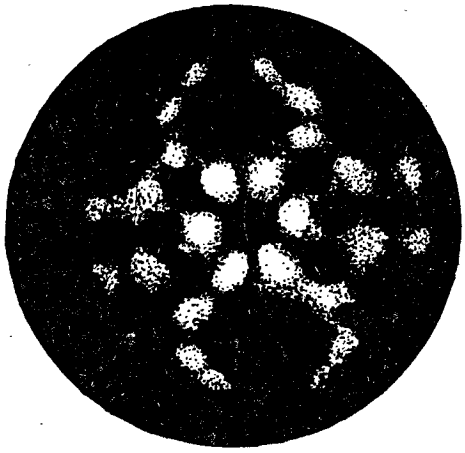


Bild 262
Wolfram-Spitze mit einer sehr dünnen in einzelne Atome aufgelösten Adsorptionsschicht von Ba

Die kristalline Struktur der Metallfläche macht sich durch Verschiedenheiten der Emission bemerkbar, da die Austrittsarbeit von der Kristallorientierung abhängt. Unter Umständen verändern aber auch geringe geometrische Inhomogenitäten das Feld an der Katodenoberfläche.

Besonders instruktiv ist die Abbildung dünner Schichten auf Trägermetallen wie es Bild 262 zeigt. Es ist dort eine sehr dünne atomare Schicht von Ba-Atomen auf einer Wolframspitze abgebildet. Einzelne Ba-Atome sind sehr gut als Streuscheibchen zu erkennen.

3. <u>Lichtelektrische Elektronenemission:</u>

a) <u>Der fotoelektrische Effekt:</u> Fällt genügend kurzwellige (z.B. ultraviolette) Strahlung auf eine Metallfläche auf, so werden aus ihr Elektronen befreit. Die Austrittsarbeit wird dabei vom Energieinhalt der Lichtquanten (Fotonen) bestritten, so daß also die Bedingung

$$hf = \frac{hc}{\lambda} \geq qU_a \qquad (604)$$

einen unteren Grenzwert f_g für die Frequenz bzw. einen oberen λ_g für die Wellenlänge festlegt. Die Energie hf muß man sich auf einen einzigen Punkt, nämlich auf ein Elektron, konzentriert denken, damit dieses die zum Austritt nötige Energie erhält (Nadelstrahlung). Für die untere Frequenzgrenze f_g gilt nach (604)

$$hf_g = qU_a$$

Die Grenzwellenlänge folgt daraus zu

$$\lambda_g = \frac{c}{f_g} = \frac{hc}{qU_a} = \frac{12{,}4 \cdot 10^{-7}}{U_a} \text{ m V}$$

Je nach der Austrittsarbeit des Katodenmaterials existiert demnach ein oberer Grenzwert von λ gemäß

$$\lambda_g U_a = 1{,}24\ \mu\text{mV} \qquad (605)$$

Bei der Temperatur $T = 0^\circ$ K ist diese Grenze eine absolut scharfe, da auch die Austrittsarbeit U_a als die Entfernung der Fermikante vom oberen Napfrand im Schottkyschen-Napfmodell scharf definiert ist. Bei höheren Temperaturen wird jedoch infolge der Auflockerung der Geschwindigkeitsverteilung die Austrittsarbeit verwaschen, so daß also Elektronen vorhanden sind, deren Austrittsarbeit kleiner ist. Die Folge davon ist, daß auch Strahlung mit etwas längerer Wellenlänge, als sie dem obigen Grenzwert entspricht, Elektronen auslösen kann.

Tafel 8

Experimentell ermittelte Grenzwellenlängen und Austrittsarbeiten

Metall	λ_g	U_a (foto)	U_a (thermisch)
	μm	V	V
Cs	0,63...0,90	1,96...1,37	> 0,7 *(als Fremdschicht)*
Th	0,34...0,37	3,68...3,24	3,0 ... 3,3
Pt	0,18...0,28	6,67...4,40	6,3
Na	0,58...0,60	2,11...2,05	1,8
Ba	0,54...0,65	2,28...1,9	1,6
W	0,23...0,27	5,36...4,52	4,52

In Tafel 8 sind für einige Katodenwerkstoffe die gemessenen Grenzwellenlängen zusammengestellt und die daraus nach (605) berechneten Austrittsarbeiten mit den aus den Richardsonschen Geraden ermittelten U_a-Werten bei der thermischen Emission verglichen. Da die Meßergebnisse der verschiedenen Autoren erheblich streuen, sind jeweils Bereiche angegeben. Die Übereinstimmung der U_a-Werte ist namentlich bei den Alkalien nicht sehr gut. Vermutlich spielen Störungen durch unkontrollierbare Oberflächenbelegungen eine große Rolle.

Ist die Energie hf des Strahlungsquantes größer als die Austrittsarbeit, so kann dem emittierten Elektron kinetische Energie mitgegeben werden. Die Energiebilanz lautet dann (A. Einstein):

$$hf = qU_a + \frac{m}{2} v^2 \quad . \tag{605a}$$

b) Die fotoelektrische Ausbeute: Der Fotostrom ist der auftreffenden Strahlungsintensität streng proportional [1]. Wir fragen nun danach, wieviel Elektronen ein tatsächlich absorbiertes Lichtquant auslöst, und definieren die fotoelektrische Ausbeute oder auch Quantenausbeute wie folgt:

$$\eta = \frac{\text{Zahl der austretenden Elektronen}}{\text{Zahl der absorbierten Lichtquanten}}$$

Die Ausbeute η ist bei kompakten Metallen sehr klein. Sie beträgt etwa

$$\eta = 0{,}01$$

Der Grund für diese geringe Ausbeute ist, daß die Strahlung - ehe sie vollständig absorbiert wird - bis auf rund 10^{-4} cm in das Metall eindringt, wogegen die auf dieser Strecke ausgelösten Elektronen nur etwa 10^{-7} cm durchdringen können. Die tiefer als 10^{-7} cm im Metall ausgelösten Elektronen können also überhaupt nicht ins Freie gelangen ($w_1 \ldots w_6$ in Bild 263). Sie geben die aufgenommene kinetische Energie in Zusammenstößen an andere Elektronen oder an das Metallgitter ab. Von den oberhalb 10^{-7}cm Tiefe ausgelösten Elektronen ($w_7 \ldots w_9$ in Bild 263) haben aber auch

1) Hierauf beruht z.B. seine Verwendung in der Fotometrie (Fotozelle).

nur diejenigen eine Chance aus dem Metall auszutreten, deren Geschwindigkeit annähernd senkrecht zur Metalloberfläche gerichtet ist (w_8, w_9 in Bild 263).

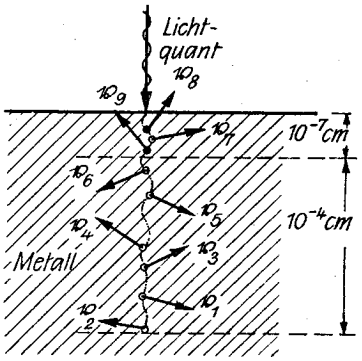


Bild 263
Zur Veranschaulichung der geringen Quantenausbeute des Fotoeffektes bei kompakten Metallen

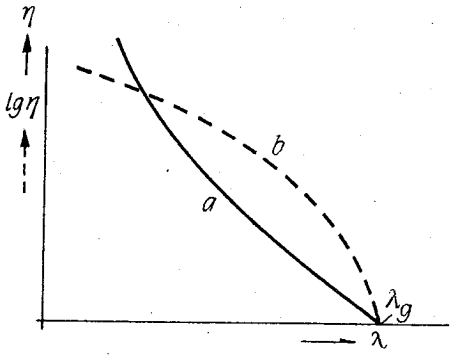


Bild 264
Charakteristik des normalen Fotoeffektes

Die Quantenausbeute η kann als Maß für die fotoelektrische Wirkung benutzt werden. Den Gang von η mit der Wellenlänge λ bei reinen Metallen zeigt Bild 264 (Kurve a). η steigt demnach unterhalb von λ_g mit abnehmender Wellenlänge λ monoton an. Man bezeichnet ein solches Verhalten als normalen Fotoeffekt. Häufig findet man auch anstelle von η den Logarithmus von η aufgetragen (Bild 264, Kurve b).

c) Zusammengesetzte Fotokatoden, selektiver Fotoeffekt: Die schon bei der thermischen Elektronenemission besprochene Herabsetzung der Austrittsarbeit durch Fremdschichten hat auch bei der Entwicklung empfindlicher Fotokatoden dazu geführt, von Massivkatoden abzugehen und Schichtkatoden herzustellen mit dem Ziele einer Erniedrigung der Grenzfrequenz und demgemäß einer Verbesserung der Ausbeute.

Wir müssen dabei zwei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob es sich um eine zwei- oder dreischichtige Fotokatode handelt. Die zweischichtige Katode besteht aus einem kompakten Grundmetall (z.B. Ag, W, Pt) und einer unmittelbar darauf adsorbierten sehr dünnen Schicht eines Fremdmetalls (z.B. Na, K, Cs, Ba). Setzt sich die adsorbierte Schicht aus Ionen zusammen, so besteht ihre Wirkung

ausschließlich in der Herabsetzung der Austrittsarbeit, d.h. Heraufsetzung der Grenzwellenlänge λ_g. Im übrigen ist der Effekt normal, der Fotostrom steigt also mit abnehmender Wellenlänge monoton an. Besteht dagegen die adsorbierte Schicht zum größten Teil aus Atomen, so werden aus diesen die Fotoelektronen ausgelöst. Dabei ist die hierfür maßgebende Grenzwellenlänge durch die Art der Bindung und die durch sie veränderten energetischen Verhältnisse nach kürzeren oder längeren Wellen verschoben.
Die Quantenausbeute, also die je absorbiertes Quant befreite Elektronenzahl, erreicht damit bedeutend höhere Werte. Die Tatsache, daß die Absorption von der Wellenlänge λ abhängt, führt zum Auftreten von mindestens einem Maximum in der Wellenlängenabhängigkeit des Fotoeffektes. Man bezeichnet ein derartiges Verhalten als selektiven Fotoeffekt.

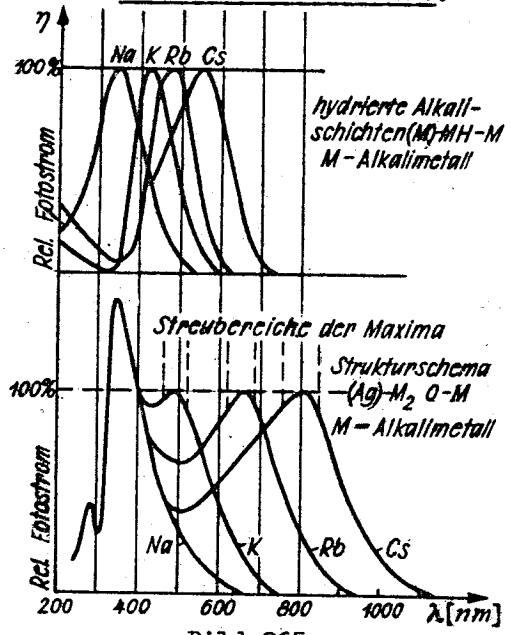


Bild 265
Spektrale Empfindlichkeit von zusammengesetzten Katoden

Bei der Dreischicht-Fotokatode befindet sich zwischen dem kompakten Grundmetall (Trägermetall) und dem aktiven Metallfilm (meist Cs) eine sehr dünne isolierende Hydrid- oder Oxydschicht, die etwa 1000 Molekülllagen stark ist. Man hat diesen Fotokatoden das Strukturschema

$$(Ag)\text{-}M_2O\text{-}M$$

gegeben. M bedeutet das jeweils verwendete Alkalimetall. Dem Trägermetall gibt man zumeist eine Klammer, um die Reihenfolge der Schichten zu kennzeichnen. Die spektralen Empfindlichkeitskurven $\eta(\lambda)$ gehen aus Bild 265 hervor. Sie weisen in ihrer Wellenlängenabhängigkeit wieder die für den selektiven Fotoeffekt typischen Maxima auf, deren Anzahl mitunter bis auf drei anwächst. Von besonderer prak-

tischer Bedeutung sind die zusammengesetzten Fotokatoden **mit Cs.** Für diese liegt das selektive Maximum, auch „langwelliges Maximum" genannt, bei 0,8 μm. Die Grenzwellenlänge hat einen Wert von etwa $\lambda_g = 1{,}4\,\mu m$. Sie liegt also schon im ultraroten Spektralgebiet, denn das sichtbare Licht hat Wellenlängen von 0,4 bis 0,8 μm und entspricht gemäß (605) einer Austrittsarbeit $U_a = 0{,}9$ V.

Zwecks Erhöhung der Ultrarot-Empfindlichkeit und Herabsetzung von lichtelektrischen Ermüdungserscheinungen baut man in die Oxydzwischenschicht der beschriebenen Cs-Katoden zusätzlich Ag- und Cs-Atome ein. Es entstehen dann recht kompliziert aufgebaute Schichten mit dem Strukturschema

$$(Ag)\text{-}Cs_2O \cdot Cs \cdot Ag\text{-}Cs$$

Bild 265 veranschaulicht ganz allgemein, daß der selektive lichtelektrische Effekt bei allen Alkalimetallen durch die Wirkung der Oxydzwischenschichten in Richtung längerer Wellenlängen verschoben wird. Das zeigt der Vergleich mit den hydrierten Alkalischichten, die eine Hydridzwischenschicht besitzen und deren Strukturschema

$$(M)\text{-}MH\text{-}M$$

lautet.

Die höchste bisher ermittelte Ausbeute zeigen die modernsten sogenannten Legierungskatoden. Der aktive Metallfilm besteht hier aus einer Legierung von z.B. Antinom und Cäsium in so dünner Schicht, daß er dunkelrot durchscheinend ist. Die Quantenausbeute η beträgt ca. 10 %, d.h., auf jedes zehnte absorbierte Lichtquant kommt im Mittel ein austretendes Elektron.

d) Die Empfindlichkeit von Fotokatoden: Die heute gebräuchlichen Fotokatoden liefern je Lumen (lm) des einfallenden Lichtstromes einen Fotostrom von

$$J_f = 10 \ldots 50\,\mu A$$

Bei Berücksichtigung des mechanischen Lichtäquivalents

$$M = 1{,}47 \cdot 10^{-3}\ \frac{W}{lm} = \frac{1}{680}\ \frac{W}{lm}$$

entspricht dies einer energetischen Ausbeute von

$$\nu = \frac{J_f}{M} = \frac{(10 \ldots 50) \cdot 10^{-6}\ A/lm}{1{,}47 \cdot 10^{-3}\ W/lm} = (7 \ldots 34) \cdot 10^{-3}\ A/W$$

Da wegen der geringen Stromdichten der Einfluß von vor der Katode auftretenden Raumladungen sehr gering ist, genügen zum „Absaugen" der austretenden Elektronen -d.h. zur Erreichung der „Sättigung"- Anodenspannungen von $U_A = (20 \ldots 100)V$.

e) Ermüdungserscheinungen bei Fotokatoden: Unter Ermüdung versteht man das Nachlassen der Stromergiebigkeit mit der Zeit. Man unterscheidet bleibende Ermüdung und reversible Ermüdung. Erstere stellt sich merklich nach Monaten oder Jahren ein und hat bleibende Veränderungen in der Schichtstruktur, z.B. Oxydation der Metalloberfläche durch Restgase, zur Ursache. Letztere ist eine Folge des großen Widerstandes der Zwischenschicht, denn dieser erschwert bei starker Stromentnahme die genügende Nachlieferung von Elektronen. Dieser Nachteil läßt sich weitgehend vermindern, indem man - wie oben schon angedeutet - die Leitfähigkeit der Zwischenschicht durch Einlagern von Fremdatomen (Ag, Cs) verbessert.

f) Technische Anwendungsmöglichkeiten (Auswahl):

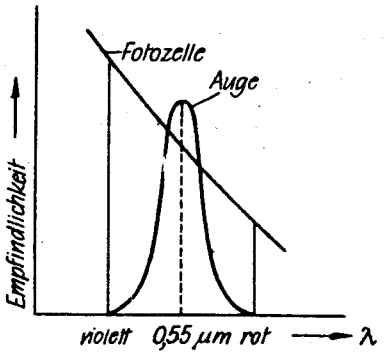


Bild 266
Empfindlichkeitskurven des menschlichen Auges und der Fotozelle (grobschematisch)

Anwendung in der Fotometrie: Die Proportionalität zwischen Fotostrom und Einstrahlung empfiehlt die Verwendung von lichtelektrischen Zellen (Fotozellen) zur Messung von Lichtstärken. Die Abweichung der Augenempfindlichkeit von der Empfindlichkeitskurve der Fotozelle (Bild 266) muß dabei durch Farbfilter korrigiert werden.

Verwendung als Bildwandler: Durch die Beschleunigung der Fotoelektronen und die Erregung von Fluoreszenzlicht auf einem Leuchtschirm lassen sich nicht sichtbare ultrarote Bilder in sichtbare Bilder umwandeln.

Verwendung im Tonfilm: Die auf dem Tonfilmband aufgezeichnete Zacken- oder Sprossenschrift wird durch lichtelektrische Zellen abgetastet. Die so registrierten Stromschwankungen werden dann einem Verstärker zugeführt und schließlich im Lautsprecher in Sprache oder Musik umgewandelt.

Anwendung im Fernsehen: Fotokatoden verwandeln die verschiedenen Helligkeitsstufen eines zu sendenden Bildes in elektrische Impulse

4. Sekundärelektronen-Emission:

a) Der Sekundärelektronen-Effekt: Läßt man Elektronen, deren Energie größer als etwa 10eV ist, auf eine metallische Fläche aufprallen, so können ebenfalls wieder Elektronen, die sogenannten Sekundärelektronen, ausgelöst werden. Die Energie dieser Sekundärelektronen ist im Gegensatz zu ihrer Anzahl unabhängig von der Energie der Primärelektronen. Sie beträgt im Mittel etwa 2 ... 30eV. Der auf diese Weise ausgelöste Elektronenstrom kann stärker sein als der auffallende primäre Elektronenstrom. Er besteht aus einer Mischung von reflektierten Primärelektronen und den zusätzlich aus dem Metall herausgeschlagenen Sekundärelektronen. Eine Trennung beider Gruppen läßt sich mit Hilfe einer Geschwindigkeitsanalyse erreichen. Bild 267 zeigt schematisch eine geeignete Meßanordnung. Trifft ein primäres Elektronenstrahlbündel mit einer homogenen Geschwindigkeit die Probe T, so entsteht von T ausgehend ein Strom von Elektronen, den ein kugel-

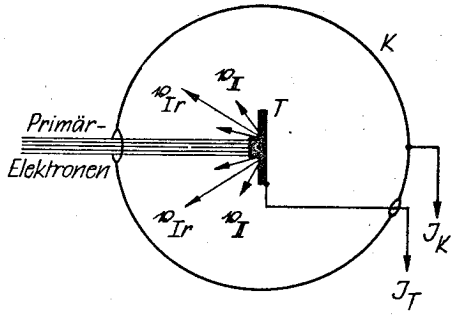


Bild 267
Meßanordnung zur Trennung der Sekundär- von den Primärelektronen

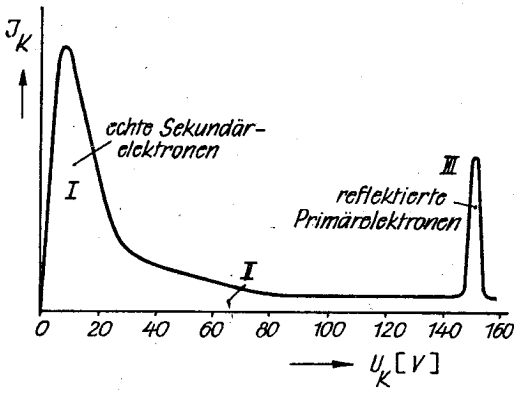


Bild 268
Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärelektronen bei 155 V Primärelektronengeschwindigkeit (n. Rudberg)

förmiger Auffänger K aufnimmt. Da die Sekundärelektronen mit einer Geschwindigkeit (v_{II}) aus dem Metall austreten, die wesentlich geringer ist als die Geschwindigkeit der einfallenden und

reflektierten Primärelektronen (φ_I und $\varphi_{I\ refl.}$), ist eine Trennung der Sekundärelektronen von den beiden anderen Arten ohne Schwierigkeiten möglich, wenn man den Strom I_K des Auffängers abhängig von dessen Potential U_K mißt.
Für die Geschwindigkeitsverteilung ergeben solche Messungen immer wieder den in Bild 268 dargestellten, durch drei Bereiche charakterisierten Verlauf:

Bereich I: Echte Sekundärelektronen mit einer im Verhältnis zur Primärenergie kleinen Energie (etwa 10 ... 30eV).

Bereich II: Primärelektronen, die ins Metall eingedrungen, aber unter großen Energieverlusten durch Rückdiffusion wieder an die Oberfläche gelangten und aus dem Metall ausgetreten sind.

Bereich III: Primärelektronen, die ohne Energieverlust an der Metalloberfläche gestreut oder elastisch reflektiert wurden.

b) Die Sekundärelektronen-Ausbeute: Es ergibt sich nun die Frage nach der Anzahl von Sekundärelektronen, die im Mittel von einem Primärelektron ausgelöst werden können. Wir bezeichnen die Ergiebigkeit oder Ausbeute an Sekundärelektronen mit δ und definieren

$$\delta = \frac{\text{Zahl der sekundär emittierten Elektronen}}{\text{Zahl der primär einfallenden Elektronen}}$$

Die Ausbeute δ ist von verschiedenen Parametern abhängig, insbesondere von der Geschwindigkeit (Energie) der Primärelektronen und dem Einfallswinkel des Primärelektronenstrahls. Natürlich spielt auch das Material der Sekundär-Elektrode und ihre Oberflächenbeschaffenheit eine Rolle. Bild 269 zeigt die Abhängigkeit der Sekundärelektronen-Ausbeute δ von der Energie U_p (im Volt-Maß) der Primärelektronen für verschiedene Metalle, Metallegierungen und Halbleiter. Bei allen Stoffen steigt die Ausbeute δ oberhalb der Einsatzspannung (10eV) mit wachsender Spannung U_p rasch bis auf ein mehr oder weniger ausgeprägtes Maximum an und sinkt in der Folge bis zu den höchsten Spannungen wieder langsam auf den Wert $\delta = 1$ und unter diesen Wert ab. Entsprechend der Größe der Sekundärelektronen-Ausbeute kann man 3 Gruppen von Stoffen unterscheiden:

Gruppe A: Stoffe, deren Sekundärelektronen-Ausbeute $\delta < 1$ ist. Zu diesen Stoffen zählen vor allem die Alkalimetalle Cs, K, Rb und ferner auch C.

Gruppe B: Stoffe mit einer Ausbeute $\delta \approx 1...2$. Hierhin gehören beispielsweise die Schwermetalle W, Pt, Cu sowie auch Ge, Si und CuO.

Gruppe C: Stoffe, deren Ausbeute $\delta > 2$ ist. Dazu zählen die Isolatoren KCl, MgO, BeO, BaO, RbCl sowie Cs_2O und die Metallegierungen Cu-Be, Ni-Be, Ag-Mg, Cu-Mg. Auch die unter [31] 3.c aufgeführten zusammengesetzten Katoden (Dreischichtkatoden) geben eine Ausbeute $\delta > 2$.

Für die Abhängigkeit der Sekundärelektronen-Ausbeute δ vom Einfallswinkel α der Primärelektronen-Strahlen ergibt sich der in Bild 270 dargestellte typische Verlauf. Je größer der Winkel α

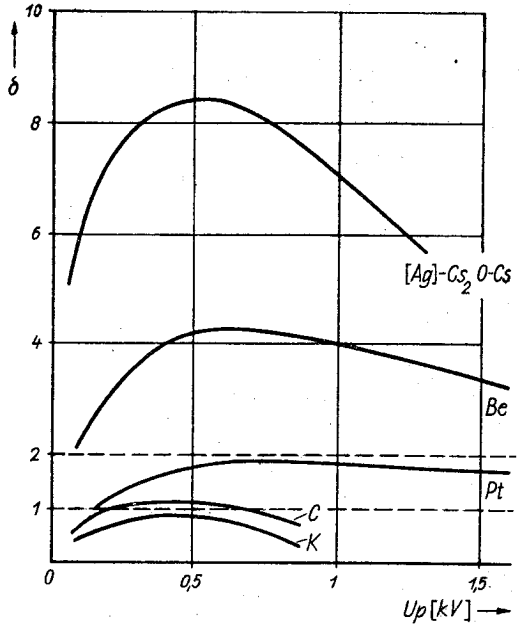


Bild 269
Sekundärelektronen-Ausbeute verschiedener Stoffe, abhängig von der Energie der Primärelektronen

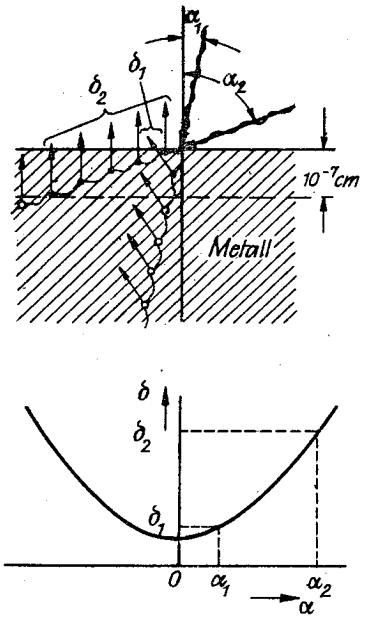


Bild 270
Sekundärelektronen-Ausbeute in Abhängigkeit vom Einfallswinkel der Primärstrahlen

gegen die Flächennormale wird, um so größer ist die Ausbeute δ. Dies gilt bis zu Winkeln von etwa 70°. Dieser Umstand erklärt sich

daraus, daß die Primärelektronen ziemlich tief in das Metall eindringen, bis sie ihren Energievorrat verlieren. Bild 270 zeigt, daß die von den Primärelektronen erreichte Tiefe um so geringer ist, je größer deren Einfallswinkel α ist. Als Folge davon muß es einer um so größeren Anzahl von Sekundärelektronen gelingen, das Metall zu verlassen, je flacher der Einfall erfolgt.
Eine befriedigende Theorie der Sekundäremission existiert bis jetzt noch nicht. Eine Berechnung der Ausbeute-Kurven δ (U) aus den Daten z.B. des Metallgitters ist also noch nicht gelungen. Das grundsätzliche Verhalten der Sekundäremission läßt sich jedoch qualitativ folgendermaßen beschreiben: Die Primärelektronen müssen die Austrittsarbeit für die Sekundärelektronen leisten. Die Ausbeute δ wird daher zunächst mit der Spannung U ansteigen. Wird aber U zu groß, so dringen die Primärelektronen immer tiefer in das Material ein, und den dann noch ausgelösten Sekundärelektronen gelingt es nicht mehr, die Oberfläche zu erreichen. Sie geben die ihnen durch Stoß vermittelte kinetische Energie an das Gitter und an die Leitungselektronen wieder ab. Die Ausbeute muß folglich bei großer Primärenergie wieder abnehmen.
Die exaktere Betrachtung muß berücksichtigen, daß das gestoßene Elektron auf das Gitter und auf die anderen Leitungselektronen wirkt.

c) Die Sekundäremission in der Technik

α) Sekundärelektronen in Elektronenröhren: Das Auftreten von Sekundärelektronen in Elektronenröhren ist eine unerwünschte Erscheinung. Sie macht beispielsweise bei Schirmgitterröhren die Einführung eines besonderen Gitters, des sogenannten Bremsgitters erforderlich. Dieses wird im Betrieb auf Nullpotential gehalten, gegen die Anode also stark negativ gemacht. Die Geschwindigkeit der an der Anode austretenden Sekundärelektronen reicht nicht aus, diesen Potentialwall zu überwinden. Sie werden deshalb gezwungen zur Anode zurückzukehren und können so als Anodenstrom nicht in Erscheinung treten.

β) Die Funktion der Sekundäremission in der Braunschen Röhre:
Da der Leuchtschirm einer Braunschen Röhre andauernd von Elektronen beschossen wird, würde er sich ohne Sekundäremission bei

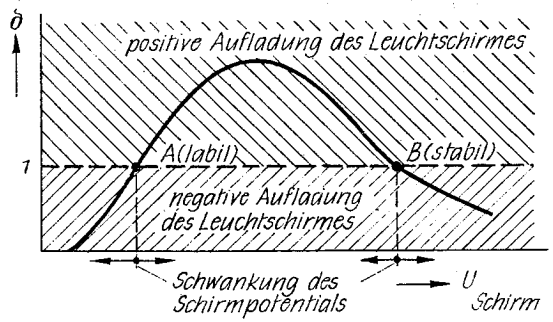


Bild 271
Vermeiden der übermäßigen Aufladung des Leuchtschirmes einer Braunschen Röhre durch Sekundäremission

guter Isolation soweit aufladen, bis sein Potential annähernd gleich dem der Katode wäre. Dadurch entstände aber, abgesehen von der Verzerrung des Bildes, ein unerwünschtes elektrisches Feld, das die primären Elektronen bremst und die Fluoreszenz schwächt.

Durch die Sekundäremission wird nun die Aufladung des Schirms vermieden. Der stationäre Zustand tritt ein, sobald die Sekundärelektronen-Ausbeute den Wert $\delta = 1$ erreicht hat. Die Zahl der auftreffenden Elektronen ist in diesem Falle gleich der Zahl der wegfliegenden Elektronen. Dem Verlauf der δ (U)-Kurve entsprechend sind grundsätzlich zwei Gleichgewichtszustände möglich (A und B in Bild 271). Allerdings ist davon nur der Zustand B stabil, denn eine zufällige Erhöhung des Schirmpotentials bei A würde infolge $\delta > 1$ eine positive Aufladung des Schirmes und damit eine Steigerung der Primärenergie bis zum Zustand B verursachen. Ist dieser aber erreicht, so führt eine weitere Steigerung des Schirmpotentials zu einer Verminderung der Sekundäremission ($\delta < 1$). Dadurch muß sich aber der Schirm wieder negativ aufladen, so daß sich die Energie der auffallenden Primärelektronen wieder bis zum Gleichgewichtszustand $\delta = 1$ in B verringern kann. Der Zustand B ist also stabil.

γ) Sekundärelektronen-Vervielfacher (SEV): Die SEV finden Verwendung bei der Verstärkung sehr schwacher Ströme, wie z.B. lichtelektrischer Emissionsströme. Sie arbeiten in der Regel mit Schichten hoher Ausbeute, wie sie oben unter Gruppe C aufgeführt sind. Um hohe Verstärkungen zu erzielen, werden mehrere solche sekundäremittierende Schichten so angeordnet, daß die Elektronen die einzelnen Elektroden nacheinander treffen. Die auf die erste

Elektrode aufschlagenden Elektronen erzeugen sekundär neue Elektronen, die, zur nächsten Elektrode beschleunigt, dort erneut zur Sekundäremission Anlaß geben. Dieser Vorgang wiederholt sich entsprechend der Stufenzahl, so daß an der Anode jeweils ein vielfach stärkerer Elektronenstrom abgenommen werden kann. Voraussetzung ist allerdings, daß sämtliche Sekundärelektronen erfaßt und zur nächsten Elektrode weitergeleitet werden. Man verwendet dazu elektronenoptische Hilfsmittel, d.h., die einzelnen Elektronenbahnen werden mittels elektrischer oder (wie früher) magnetischer Felder gesammelt, d.h. „fokussiert".
Die durch den genannten Vorgang erzielte Verstärkung V ist von der Anzahl der Stufen n und der Sekundärelektronen-Ausbeute δ der verwendeten Schichten abhängig, die natürlich ihrerseits von der Spannung U je Stufe abhängt. Sie beträgt

$$V = \delta^n , \qquad (606a)$$

wobei natürlich $\delta > 1$ sein muß, damit eine wirkliche „Verstärkung" zustande kommt [1]. Da δ von U abhängig ist, läßt sich die Verstärkung V auch als Funktion der Spannung angeben. Es gilt als „Faustformel":

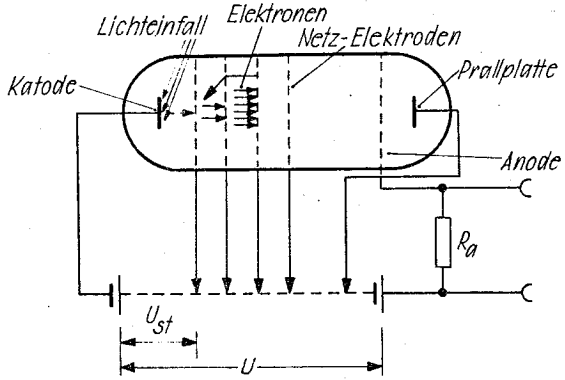
$$V = C \cdot U^{\beta} , \qquad (606b)$$

wobei der Exponent β erfahrungsgemäß zwischen 3 und 6 liegt. Die sehr starke Abhängigkeit von U verlangt eine sehr konstante Betriebsspannung der SEV. Störend ist auch der in der Hauptsache auf Isolationsverluste, aber auch auf thermische Emissionsströme von Fotokatoden bei Zimmertemperatur zurückzuführende Dunkelstrom. Er läßt sich wohl durch längere Kriechwege bzw. Abkühlung weitgehend vermindern, ist jedoch nicht ganz zum Verschwinden zu bringen.
Je nach der Führung der Elektronenstrahlen unterscheidet man elektromagnetische und elektrostatische Vervielfacher. Moderne kommerzielle SEV benutzen ausschließlich geeignet gestaltete elektrostatische Felder. Prinzipielle Ausführungsmöglichkeiten zeigt Bild 272. Die geometrische Anordnung der einzelnen Stufen

1) Praktisches Beispiel: Für einen kommerziellen SEV mit n = 11 Stufen und einer Ausbeute $\delta = 3$ wird

$$V = 3^{11} \approx 200\,000$$

a) Netz-Sekundärelektronenvervielfacher



b) Platten-Sekundärelektronenvervielfacher

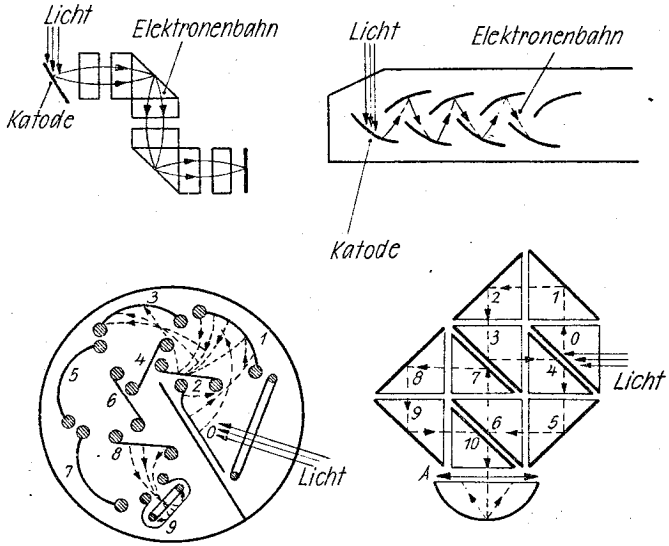


Bild 272
Prinzipielle Ausführungsmöglichkeiten elektrostatischer Netz- und Plattenvervielfacher

ergibt sich unmittelbar aus Art und Form der Elektroden. Bei Netz-Vervielfachern (Bild 272a) sind die feinmaschigen Netze in der Regel hintereinander angeordnet.

[60] Das Elektronengas im Hochvakuum

1. Die Existenz eines freien Elektronengases: Wir wissen, daß innerhalb des Ionengitters von Metallen die Elektronen-Konzentration so groß ist, daß das Elektronengas als entartet angesehen werden muß und für die Verteilung der Energie (bzw. der Geschwindigkeiten) die Fermi-Statistik gilt. Es interessiert nun, ob auch nach dem Austritt von Elektronen aus dem Metall ein Elektronengas im Vakuum, ein sogenanntes freies Elektronengas, existiert und welchen Gesetzmäßigkeiten ein solches unterliegen müßte.
Wir betrachten hierzu einmal eine Glühkatode aus Wolfram, die eine Temperatur T_K habe und als einzige Elektrode in einer hochevakuierten Glaskugel stehe. Die Katode emittiere andauernd Elektronen. Dann tritt je Flächeneinheit ein Strom aus ihr aus, der gemäß (596/597) durch

$$G = A \cdot T_K^2 \, e^{-\frac{qU_a}{kT_K}} \qquad (607)$$

gegeben ist. Um die Katode herum entsteht dadurch eine Elektronenatmosphäre, die sich mit der Zeit über den ganzen verfügbaren Vakuumraum ausbreitet. An die Wand gelangen die Elektronen nur anfangs, später werden sie durch die so gebildete negative Oberflächenladung schon vor Erreichen der Wand wieder zurückgestoßen. Die mittlere Elektronendichte im Gefäß müßte auf diese Weise also mit der Zeit unbegrenzt anwachsen, falls ein Teil der Elektronen nicht irgendwie wieder verschwinden kann. Diese Möglichkeit besteht aber tatsächlich, indem nämlich eine gewisse Elektronenmenge je Zeit- und Flächeneinheit auf die Katode auftrifft und in das Katodenmetall eindringt, wobei die vorher durch Wärme aufgebrachte Austrittsarbeit wieder frei wird. Ein Gleichgewicht stellt sich dann ein, wenn an der Katode der Einstrom gleich dem Ausstrom an Elektronen ist [1]. Damit ist aber die Grundlage für die Existenz eines freien Elektronengases im Vakuum gegeben.

---

1) Analogon: Verdampfen einer Flüssigkeit im abgeschlossenen Raum.

2. Die Temperatur des freien Elektronengases: Da die Elektronen an der Gefäßwand elastisch reflektiert werden und im Gegensatz zu den Wandstößen eines materiellen Gases nur Impulse übertragen, findet mit der Wand kein Energieaustausch statt. Diese hat lediglich den Druck der Elektronen abzufangen. Die Temperatur der Gefäßwand ist somit gleichgültig für unsere Betrachtung. Dagegen findet jedoch, wie oben schon angedeutet, an der Katode ein ständiger Energieaustausch zwischen den aufprallenden Elektronen und dem Metallgitter des Katodenmaterials statt. Die Folge davon ist ein thermisches Gleichgewicht mit der Katode, so daß also für die Temperatur T_e des freien Elektronengases gilt

$$T_e = T_K \tag{608}$$

3. Elektronendichte und Geschwindigkeitsverteilung: Die Elektronendichte im Vakuum muß wegen der gegenseitigen Abstoßungskräfte der Elektronenladungen viel geringer sein als innerhalb eines Metallgitters. Es liegt deshalb die Vermutung nahe, daß sich das freie Elektronengas nicht mehr entartet, sondern klassisch verhält. Bei Annahme einer Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung läßt sich die Zahl der auf die Katode auftreffenden Elektronen als Funktion der Dichte n und der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ aus Gleichung(593)ermitteln. Für den Gleichgewichtszustand gilt dann die Stationärsbedingung

$$\frac{n\bar{v}}{4} q_e = G(T_K) \tag{609}$$

Der Ausdruck $G(T_K)$ bedeutet die Emissionsstromdichte, die sich aus der Richardsonschen Formel (607) berechnet. Aus (609) folgt für die Elektronendichte im Vakuumraum:

$$n = \frac{4 \circ G(T_K)}{\bar{v}\, q_e} \tag{610}$$

Setzen wir zur Abschätzung der Elektronendichte (n) die Temperatur einer Wolframkatode $T_K = 2700^{\circ}K$, so wird gemäß Bild 256 die Stromausbeute $G = 1\ A/cm^2 = 10^4\ A/m^2$. Die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen, die dieser Temperatur entspricht, ergibt sich nach Gl. (566c) zu

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8\,k\,T}{\pi m}} = 3{,}2 \cdot 10^5 \text{ m/s} ,$$

so daß für die Elektronendichte im Vakuum der Zahlenwert

$$n = \frac{4 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{As} \cdot 3{,}2 \cdot 10^5 \text{ m/s}} = 7{,}8 \cdot 10^{17} \text{m}^{-3} \qquad (611)$$

folgt. Innerhalb eines Metalles ergaben sich dagegen Werte von

$$n = 8{,}5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \quad \text{für Kupfer } ^{1)}$$

$$n = 6{,}3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \quad \text{für Wolfram}$$

Die Elektronendichte ist also, wie eingangs behauptet, tatsächlich wesentlich geringer als im Metall. Vergleicht man nun den aus (611) folgenden mittleren Teilchenabstand

$$\delta = n^{-1/3} = 1{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

mit der De-Broglie-Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 2{,}3 \cdot 10^{-9} \text{ m} ,$$

wobei für die Geschwindigkeit v der obige Wert $\bar{v} = 3{,}2 \cdot 10^5$ m/s anzusetzen ist, so ergibt sich erwartungsgemäß

$$\lambda \ll \delta$$

Damit haben wir den Nachweis erbracht, daß das freie Elektronengas genügend weit von der Entartung entfernt ist und somit nach den klassischen Gesichtspunkten der kinetischen Gastheorie behandelt werden darf. Es gilt also die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung und alle daraus ableitbaren Beziehungen, wie z.B.

der Elektronendruck: $p = n\,k\,T$,

die Diffusionsstromdichte: $\mathfrak{z} = -D \operatorname{grad} n = \frac{\bar{v}\lambda}{3} \operatorname{grad} n$,

die Teilchenstromdichte je Flächeneinheit: $Z = \frac{n\bar{v}}{4}$ usw.

4. Der Anlaufstrom: Wegen der statistischen Verteilung der Elektronengeschwindigkeiten über einen theoretisch unendlichen Bereich muß es einer gewissen Zahl von Elektronen gelingen, auch gegen ein zur Katode negatives Potential anzulaufen. Bild 273 veranschaulicht dies für die Maxwell-Verteilung. Führt man daher eine kleine ebene Elektrode S (Sonde) in den Vakuumraum ein und gibt

1) Vgl. Abschn. [56] 3., Gitterkonstante von Kupfer!

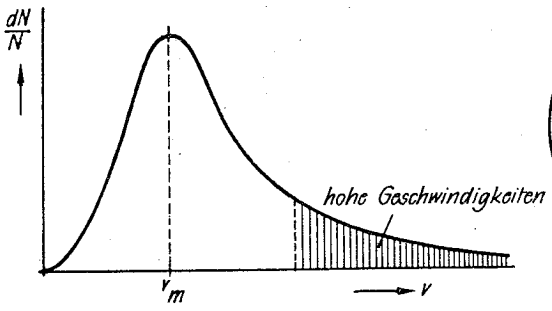


Bild 273
Geschwindigkeitsverteilung des Elektronengases im Vakuum

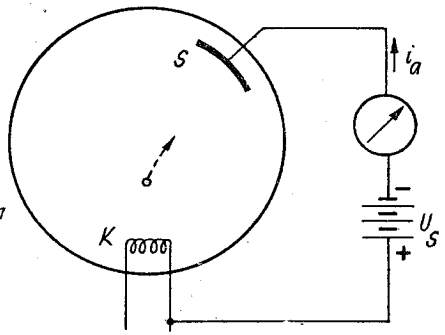


Bild 274
Schema zur Messung des Anlauf- und Sättigungsstromes

ihr verschiedene negative Potentiale gegen die Katode K (Bild 274), so läßt sich dieser „Anlaufstrom" ohne weiteres experimentell bestimmen. Bei positivem Sondenpotential werden alle aus der Katode austretenden Elektronen von der Sonde S (Anode) abgesaugt, und man erhält den der Richardsonschen Gleichung entsprechenden Sättigungsstrom. Durch eine negativ geladene Sonde wird dagegen die Elektronendichte vor S um einen Faktor

$$\frac{n_S}{n_K} \leqq 1$$

verringert. Die Dichte G_a des Anlaufstromes berechnet sich wieder aus der Elektronendichte n_S vor der Sonde und aus der mittleren thermischen Geschwindigkeit zu

$$G_a = q \cdot Z = q \frac{n_S \bar{v}}{4} \tag{612a}$$

Andererseits gibt die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung für den Anlaufstrom folgenden Ausdruck:

$$G_a = q \frac{n_K \bar{v}}{4} e^{-\frac{q U_S}{kT}} \tag{612b}$$

Der Vergleich von (612a) mit (612b) gibt also für die Elektronendichte n_S vor der Sonde

$$n_S = n_K e^{-\frac{qU_S}{kT}} \tag{613}$$

Man bezeichnet diese Gleichung auch als Boltzmannsches Gesetz. Die Elektronendichte fällt also von der Katode an, ähnlich dem

Barometerstand [1], nach einer e-Funktion mit dem Ortspotential ab. Die Anlaufstrommessung gestattet neben quantitativen Rückschlüssen auf Geschwindigkeits- und Dichteverteilung des freien Elektronengases auch die experimentelle Bestimmung der Katodentemperatur. Man bringt zu diesem Zweck Gl. (612b) auf die Form einer Geraden

$$\ln G_a = C_1 - C_2 U_S ,$$

wobei für C_1 mit (566c)

$$C_1 = \ln \left(q \frac{n_K}{4} \sqrt{\frac{8k}{\pi m}} \sqrt{T} \right)$$

und für C_2

$$C_2 = \frac{q}{k} \frac{1}{T}$$

zu setzen ist. Die Messung von G_a in Abhängigkeit von U_S (Anlaufkennlinie) gibt dann eine Gerade, aus deren Neigung T ermittelt werden kann, während der Achsenabstand C_1 die Elektronendichte n_K ergibt.

[61] Mechanismus der Stromleitung im Hochvakuum

1. Zeitlicher Zusammenhang zwischen Trägerbewegung und Strom:

Im Hochvakuum kann ein Strom allein von Elektronen getragen werden, wenn man von technisch wenig interessierenden Sonderfällen (Glühanode) absieht. Wir wollen deshalb den zeitlichen Ablauf des von einem Elektron hervorgerufenen Stromes untersuchen, wenn dieses von einer Elektrode K (Katode) zu einer anderen Elektrode A (Anode) übergeht.

Befindet sich das Elektron e noch dicht an der Oberfläche von K (Bild 275, Zeitpunkt t_1), so geht der überwiegende Teil der im Elektron einmündenden Feldlinien von K aus. Bei der Wanderung des Elektrons zur Anode A nimmt der von K ausgehende Fluß und damit auch die Influenzladung q auf K ab, während sie auf der Anode im gleichen Maße ansteigt. (Bild 275, Zeitpunkte t_1 und t_2).

Der dieser Ladungsänderung entsprechende Strom i(t) durchfließt die zwischen beide Elektroden geschaltete Stromquelle (Batterie) im Sinne einer „Entladung", d.h., er entnimmt der Stromquelle Energie. Der zeitliche Verlauf dieses Stromes hängt

1) Die Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe h verläuft nach der Barometerformel

$$p_h = p_o \, e^{-\text{konst.} \cdot h}$$

von der Ladung q, von der Geschwindigkeit und der Bahn des Elektrons sowie von der Form der Elektroden und deren Potentialen ab. Eine einfache Energiebetrachtung gibt bereits den zeitlichen Stromverlauf für den Spezialfall des homogenen Feldes: Ein Elektron nimmt beim Durchfliegen einer Strecke dx (Bild 275) die Energie

$$dW = q\,E\,dx$$

auf. Diese Energie muß, wie bereits gesagt, von der Batterie geliefert werden, so daß andererseits gilt

$$dW = U_o\,i(t)dt$$

Aus dem Vergleich folgt dann für den Strom

$$i(t) = \frac{qE}{U_o}\frac{dx}{dt} = \frac{qE}{U_o}\,v$$

Die Geschwindigkeit v des Elektrons folgt aus der konstanten Beschleunigung a zu

$$v = a\,t = \frac{qE}{m}\,t$$

Damit wird dann:

$$i(t) = \frac{q^2\,E^2}{mU_o}\,t$$

Dabei zählt die Zeit t vom Momente des Austrittes des Elektrons

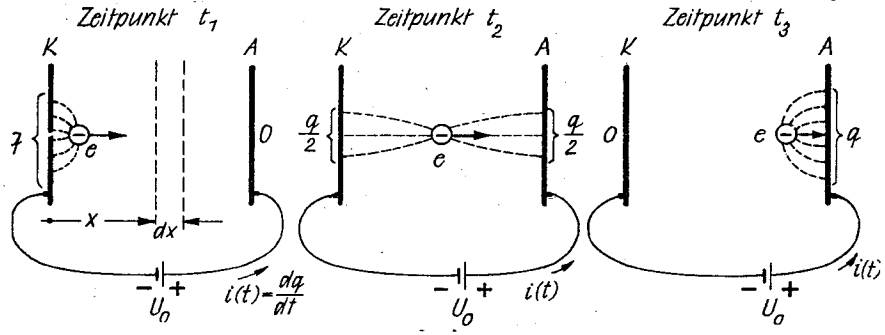


Bild 275
Zur Stromleitung im Hochvakuum

aus der Katode an. Wegen der Homogenität des Feldes wird

$$E = \frac{U_o}{d}\,,$$

wenn d der Plattenabstand ist. Damit ist der zeitliche Ablauf des Stromes durch

$$i(t) = \frac{q^2 U_o}{md^2}\,t$$

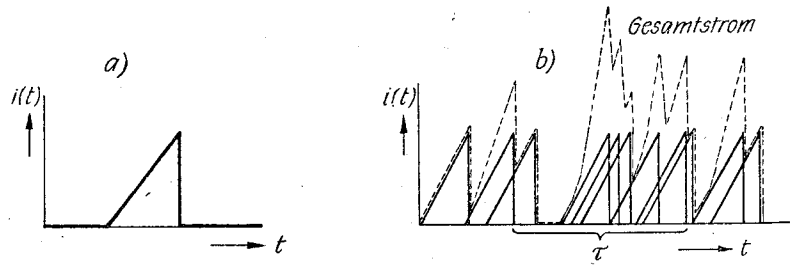


Bild 276
Zeitlicher Ablauf des Stromes beim Übergang eines (a) bzw. mehrerer (b) Elektronen von Katode zu Anode

gegeben. i(t) steigt also proportional mit der Zeit t an und springt dann bei Eintritt des Elektrons in die Elektrode A auf den Wert 0 zurück (Bild 276a).
Sind viele sich beliebig zwischen den Elektroden bewegende Ladungsträger (Elektronen) vorhanden, deren Austrittszeiten statistisch streuen, so überlagern sich die einzelnen Teilströme ungestört zum Gesamtstrom (Bild 276b).

2. Stromschwankungserscheinungen:

a) Grundsätzliches: Der Beitrag eines Elektrons ($q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As) zum Gesamtstrom ist sehr gering. Soll z.B. ein gerade noch meßbarer Strom von 10^{-11} A fließen, so müssen je Sekunde im Durchschnitt 10^8 Elektronen von der Katode zur Anode übergehen. Da die Flugzeiten sehr kurz sind (für $v = 10^6$ m/s und einen Elektrodenabstand von d = 1 cm etwa 10^{-8} s!), besteht der Gesamtstrom aus sehr kurzen, stromstarken Impulsen. Zwischen diesen Impulsen können Pausen liegen, die mit der Zeitdauer der Stromstöße vergleichbar sind. Dadurch wird der Stromfluß ungleichmäßig, so daß dem Gleichstromanteil eine unregelmäßige Rippelung überlagert wird. Die dadurch bedingte statistische Stromschwankung heißt Schroteffekt, weil die zeitlich unregelmäßige Aufeinanderfolge der Stromimpulse in einem angeschlossenen Verstärker ein Rauschen hervorruft ähnlich dem Geräusch, das man erhält, wenn man Schrotkugeln auf eine harte Unterlage auffallen läßt. Ein besonderes Charakteristikum des beschriebenen unregelmäßigen Stromverlaufes ist die Unabhängigkeit der Einzelereignisse voneinander, d.h., der Zeitpunkt des Austritts und der anschließende Flug eines herausgegriffenen Elektrons ist vom Schicksale aller übrigen

Elektronen vollkommen unabhängig. Für derartige statistische Vorgänge gelten einfache Gesetzmäßigkeiten, die nachfolgend genannt werden.

b) Kennwerte der Schwankungsverteilung: Messen wir die innerhalb einer Reihe von m genügend kurzen, aber einander gleichen Zeitintervallen τ von der Katode zur Anode übergehende Elektronenzahl n, so ergibt sich eine Reihe von m Meßwerten

$$n_1\ n_2\ n_3 \cdots n_k \cdots n_m,$$

die eine gewisse Streuung um den Mittelwert aufweisen. Zur quantitativen Beurteilung der Schwankungen bzw. der Unregelmäßigkeit eines Ereignisses dienen folgende Kennwerte:

Arithmetischer Mittelwert

$$\overline{n} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} n_k \tag{614}$$

Relative Abweichung der Einzelmessung n_k vom Mittelwert

$$\delta_k = \frac{n_k - \overline{n}}{\overline{n}} = \frac{n_k}{\overline{n}} - 1 \tag{615}$$

Diese Definition bewirkt von selbst, daß

$$\sum_{k=1}^{m} \delta_k = 0, \quad \text{also } \overline{\delta} = 0$$

wird.

Quadratischer Mittelwert der Abweichung (mittleres Schwankungsquadrat, Effektivwert)

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{n_k - \overline{n}}{\overline{n}} \right)^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \delta_k^{\,2} \tag{616}$$

Das Quadrat des Effektivwertes der Abweichung ist also unabhängig vom Vorzeichen der Abweichung und deshalb immer von Null verschieden.

Zusammenhang zwischen $\overline{\delta^2}$ und $\overline{n}$:

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\overline{n}} \tag{617}$$

Man bezeichnet diesen Zusammenhang zwischen quadratischem Mittelwert der Abweichung und dem arithmetischen Mittelwert als Fundamentalgesetz der Schwankungsverteilung. Es gilt nur, wenn die Einzelereignisse voneinander unabhängig sind.
Wenden wir obige Definitionen auf die Elektronenströmung im Hochvakuum an, so liefert der Mittelwert $\overline{n}$ der Elektronenzahl je Zeitintervall τ den Gleichstromanteil

$$i_g = q \frac{\overline{n}}{\tau}$$

Diesem Gleichstrom sind Schwankungen überlagert, deren mittleres Quadrat gleich

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{\overline{n}} = \frac{q}{i_g \tau} \tag{618}$$

wird. Diese Schwankungen sind sehr klein, und man muß schon sehr kurze Zeitabschnitte τ wählen, um sie zu beobachten.
Beispiel: Es fließe der eben noch meßbare Strom $i_g = 10^{-11}$ A. Soll nun die relative Schwankung der Einzelereignisse 10 % betragen, das mittlere Schwankungsquadrat also 1 %, so würde aus Gl. (617) $\overline{n} = 100$ folgen. Das würde aber nach Gl. (618) bedeuten, daß

$$\tau = \frac{q \cdot \overline{n}}{i_g} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{As} \cdot 10^2}{10^{-11}\ \text{A}} = 1{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{s}$$

wird. Diese Zeitspanne τ ist also so kurz, daß die experimentelle Erfassung der Schwankungen auf diese Weise sehr schwierig wäre. Deswegen treten auch die Schwankungserscheinungen bei der Stromleitung im Vakuum in dieser Form praktisch nicht in Erscheinung.

Anders wird dagegen der Sachverhalt, wenn hohe Verstärkungen durch Röhrenverstärker oder SEV erreicht werden sollen. In diesem Falle gebieten die Schwankungserscheinungen in Gestalt des Schroteffektes der Höhe der Verstärkung eine Grenze. Oberhalb dieser Grenze geht ein verstärktes Signal im sogenannten Rauschen unter.[1)]

[62] Trägerbewegung in elektrischen Feldern. Als Träger sollen ganz allgemein Elektronen oder Ionen in Betracht kommen. Beide können als Punktladungen mit Masse behaftet angesehen werden, so daß wir weitestgehend die Gesetze der Kinetik von Massepunkten anwenden können.

---

1) Näheres s. Lehrbrief 2 der Reihe: Ausgewählte Kapitel der Theoretischen Elektrotechnik S. 79...102!

1. Kraft, Geschwindigkeit, Energie: Ein Träger ist eindeutig durch die Angabe seiner Ladung q und seiner Masse m charakterisiert. Die Kraft, die im elektrischen Feld der Stärke $\mathcal{E}$ auf einen Träger der Ladung q ausgeübt wird, ist

$$\mathcal{P}_e = q\mathcal{E} \tag{619}$$

Die vektorielle Schreibweise bringt zum Ausdruck, daß Kraft und Feldstärke bei positiver Ladung q gleichgerichtet, bei negativer Ladung (Elektron) entgegengesetzt gerichtet sind (Bild 277).

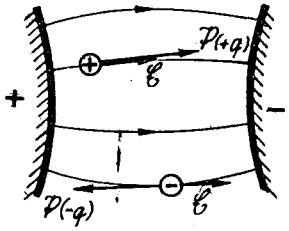


Bild 277
Zur Kraftwirkung des elektrischen Feldes auf Ladungsträger

Das II. Gesetz Newtons (sekunda lex) gibt:

$$m\mathfrak{a} = m \cdot \frac{d^2\mathcal{S}}{dt^2} = q\mathcal{E} \tag{620}$$

und nach Erweiterung mit $\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \mathfrak{v}$:

$$m \cdot \frac{d^2\mathcal{S}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathcal{S}}{dt} = q \cdot \mathcal{E} \cdot \frac{d\mathcal{S}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathcal{S}}{dt}\right)^2\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\mathfrak{v}^2\right] = q \cdot \mathcal{E} \cdot \frac{d\mathcal{S}}{dt}$$

dt hebt sich fort

$$d(W_{kin}) = q \cdot \mathcal{E} \cdot d\mathcal{S}$$

und die Integration zwischen P_1 und P_2 ergibt

$$\int_{P_1}^{P_2} d(W_{kin}) = W_{kin_2} - W_{kin_1} = q\int_{P_1}^{P_2} \mathcal{E} \cdot d\mathcal{S} = -q(U_2 - U_1)$$

$$W_{kin_2} - W_{kin_1} = q(U_1 - U_2) = q \cdot \Delta U\ , \tag{621}$$

d.h., Zunahme der kinetischen Energie = Abnahme der potentiellen Energie.

Speziell:

$W_{kin_1} = 0$ und, $U_1 = 0$:

$$\frac{m}{2} v^2 = -q \cdot U_2$$

Die Zunahme der kinetischen Energie des Trägers ist also gleich der vom elektrischen Feld $\mathscr{E}$ an diesem Träger geleisteten Arbeit. Ist die Anfangsgeschwindigkeit des Träger $v_0 = 0$, so wird auch dessen anfängliche kinetische Energie $W_0 = 0$, und wir erhalten einfach

$$W = \frac{m}{2} v^2 = qU \tag{622}$$

Aus (622) berechnet sich die Geschwindigkeit des Trägers, wenn er das Potential U frei durchfallen [1] hat, zu

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \tag{623a}$$

Ist der Ladungsträger ein Elektron, so wird also

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{As}}{0{,}91 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{Ws^3/m^2}}}\, U = 5{,}94 \cdot 10^5 \sqrt{U}\left[\frac{m}{s}\right], \tag{623b}$$

wenn man U in Volt mißt. Ausgehend von (623b) wurde das sogenannte Voltmaß der Geschwindigkeit begründet:

‖1 e-Volt entspricht einer Geschwindigkeit von $v = 5{,}94 \cdot 10^5$ m/s!

Man beachte, daß zwischen v und U keine Proportionalität besteht!

2. Bewegung von Trägern im homogenen elektrischen Feld: Eine einfache Form der Bewegung liegt vor, wenn der Träger längs einer elektrischen Feldlinie gegen das Feld anläuft. Der Träger beschreibt dann die gleiche Bahn, wie ein Körper beim senkrechten Wurf nach oben. Macht man also die obere Platte eines Kondensators negativ (Bild 278), so steigen die Elektronen in diesem Falle entsprechend ihrer Eintrittsenergie bis zu einer bestimmten Höhe senkrecht nach oben und kehren dann um (Bahn 1). Treten die Elektronen schräg in das Kondensatorfeld ein, so beschreiben sie Parabelbahnen (Bahnen 2 bis 4 in Bild 278). Es liegen dann die gleichen

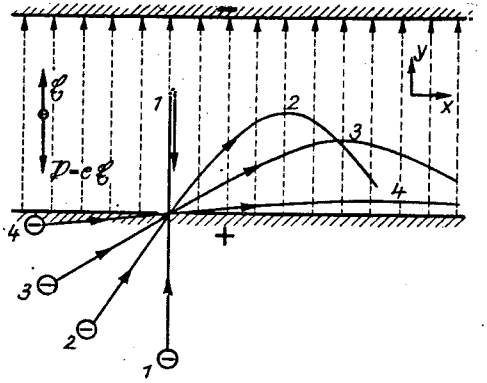


Bild 278
Elektronenbahnen im homogenen Feld eines Plattenkondensators

1) d.h., es erfolgt kein Zusammenstoß mit anderen Teilchen.

Verhältnisse vor wie beim schiefen Wurf eines Körpers im homogenen Schwerefeld.

Die Elektronenbahnen lassen sich sichtbar machen, wenn man den Kondensator mit einer Gasfüllung von geringer Dichte, z.B. Neon, versieht. Die Gasmolekeln werden durch Zusammenstöße mit dem Elektron zur Lichtemission angeregt und kennzeichnen so den Weg, auf dem sich das Elektron bewegt. Allerdings ist zu beachten, daß die in der Nähe des Umkehrpunktes schließlich auf Null herabsinkende Voltgeschwindigkeit des Elektrons zur Anregung der Gasmolekeln nicht mehr ausreicht [1] und demzufolge die vom Elektron in der Umgebung des Umkehrpunktes beschriebene Bahn nicht zu sehen ist.

5. Ablenkung von Elektronenstrahlen im Plattenkondensator:

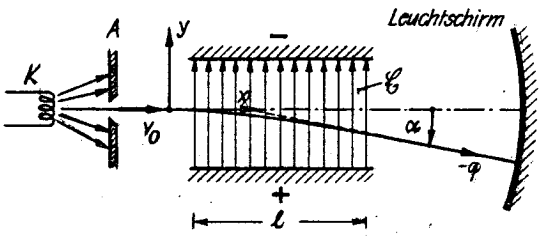


Bild 279
Zur Ablenkung im Plattenkondensator (Braunsche Röhre)

Schießen wir einen Elektronenstrahl mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 waagerecht in das senkrecht gerichtete homogene Feld eines Plattenkondensators hinein (Bild 279), so wird dieser je nach der Größe von v_0, der Stärke des Kondensatorfeldes und dessen Einwirkdauer verschieden stark abgelenkt. Ein Elektron, daß zur Zeit $t = 0$ in den Kondensator mit der Geschwindigkeit v_0 eintritt, hat nach t Sekunden die Wegkomponenten

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{Eq}{m} t^2$$

Durch Eliminierung von t folgt für die Ablenkung y als Funktion von x die Gleichung einer Parabel, nämlich

$$y = \frac{1}{2} \frac{Eq}{m v_0^2} x^2 ,$$

und der Ablenkungswinkel α (vgl. Bild 279) ist gegeben durch

1) Das Anregungspotential der zu verwendenden Gase liegt bei etwa 10 V.

$$\tan \alpha = \left(\frac{dY}{dx}\right)_{x=\ell} = \frac{E q \ell}{m v_o^2} \qquad (624)$$

Da die Plattenspannung bei homogenem Kondensatorfeld E den Wert

$$U_p = Ed$$

hat (d = Plattenabstand) und die Eintrittsgeschwindigkeit des Trägers

$$v_o = \sqrt{\frac{2qU_o}{m}}$$

ist, können wir dafür auch schreiben

$$\tan \alpha = \frac{\ell}{2d} \frac{U_p}{U_o} \qquad (625)$$

Die Ablenkformel (625) enthält weder Ladung noch Masse, d.h., Träger gleicher Beschleunigungsspannung U_o erfahren ganz unabhängig von ihrer Ladung und Masse eine gleichgroße Ablenkung. Später werden wir sehen, daß dies ganz allgemein für beliebig gestaltete elektrische Felder gültig ist. Des weiteren tritt in Gl. (625) nur das Verhältnis der Spannungen U_o und U_p auf. Ändert man also beide Spannungen im gleichen Verhältnis, so bleibt die Ablenkung dieselbe. Auch dieser Satz ist allgemein gültig und besitzt große praktische Bedeutung. Damit haben wir bereits die elementare Theorie der Braunschen Röhre mit elektrischer Ablenkung entwickelt.

4. Energieumsatz in elektrischen Feldern:

Werden Träger beschleunigt, so nehmen sie Energie aus dem Feld auf und verwandeln sie in kinetische Energie. Diese Energie ist von der die Elektroden speisenden Stromquelle aufzubringen, die dadurch entladen wird (Akkumulator!).
Werden Träger verzögert (abgebremst), indem sie gegen ein elektrisches Feld anlaufen, so verlieren sie kinetische Energie. Diese Energie wird an das Feld und damit an die speisende Stromquelle abgegeben, die dadurch aufgeladen wird.

[63] Trägerbewegung in magnetischen Feldern

1. Kraft, Bahnkrümmung, Energie: Die Kraft, die auf einen Träger der Ladung q im Magnetfeld der Induktion $\mathfrak{B}$ ausgeübt wird, beträgt

$$\mathfrak{F}_m = q(\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}) \ , \qquad (626)$$

wenn $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Ladungsträgers und $\mathfrak{B}$ die Induktion des Magnetfeldes ist. Für das Kreuzprodukt gilt bekanntlich

$$|\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}| = vB \sin(\mathfrak{v},\mathfrak{B})$$

Man bezeichnet $\mathfrak{F}_m$ auch als „Lorentzkraft". Die Richtung von $\mathfrak{F}_m$ liegt so, daß ein positiver Träger q (Ion) die $\mathfrak{B}$-Linien nach der Linksschraube, ein negativer Träger e (Elektron) nach einer Rechtsschraube umkreist (Bild 280).

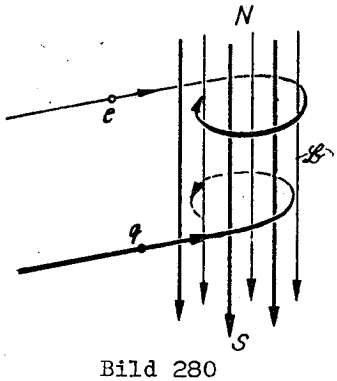


Bild 280
Krümmung der Trägerbahn im Magnetfeld

In energetischer Hinsicht besteht zwischen der Trägerbewegung im magnetischen Feld und der Trägerbewegung im elektrischen Feld ein grundsätzlicher Unterschied:

> Ein Träger kann wohl aus dem elektrischen, niemals aber aus dem magnetischen Feld Energie aufnehmen oder Energie an dieses abgeben.

Diese wichtige Eigenschaft des Magnetfeldes rührt davon her, daß die Kraft $\mathfrak{F}_m$ immer senkrecht zur Bahn des Trägers zeigt, wie dies aus der Definition des Kreuzproduktes folgt, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ also lediglich eine Änderung ihrer Richtung, nicht aber ihres Betrages v erfahren kann.

2. Bewegung von Trägern im homogenen Magnetfeld: Während im elektrischen Feld stets eine Kraft auf den Träger ausgeübt wird, besteht für diesen die Möglichkeit, ein magnetisches Feld unbeeinflußt zu durchfliegen. Dies ist gemäß Gl. (626) dann der Fall, wenn sich der Träger parallel zu den Induktionslinien bewegt, d.h.

$$\sin(\mathfrak{v},\mathfrak{B}) = 0$$

wird. Bewegt sich dagegen der Träger senkrecht zu den Induktionslinien, so beschreibt er eine Kreisbahn, deren Krümmungshalbmesser R durch das Kräftegleichgewicht

Feldkraft P_m = Fliehkraft P_f

gegeben ist. Für die Feldkraft ergibt sich bei Berücksichtigung von sin $(\vec{v},\vec{B}) = 1$ aus Gl. (626)

$$P_m = qvB,$$

und für die Fliehkraft eines rotierenden Teilchens gilt allgemein

$$P_f = m\frac{v^2}{R}$$

Aus der Gleichsetzung folgt sofort

$$R = \frac{m\,v}{q\,B} \tag{627a}$$

oder, wenn man die Anlaufspannung U des Trägers gemäß (623) einführt,

$$R = \sqrt{\frac{2m}{q}}\,\frac{\sqrt{U}}{B} \tag{627b}$$

Speziell für Elektronen wird

$$R = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{Ws^3/m^2}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{As}}}\,\frac{\sqrt{U}}{B} = 3{,}38 \cdot 10^{-6}\,\frac{\sqrt{U}}{B}\ [\mathrm{m}]\ ,$$

wobei U wie üblich in [Volt] und die Induktion B in $\left[\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\right]$ einzusetzen ist.

Das aus (627) folgende Produkt RB bezeichnet man oft auch als „Steifigkeit" der Bahn. Diese ist der Geschwindigkeit v proportional, mit der ein Träger in das Magnetfeld eintritt.

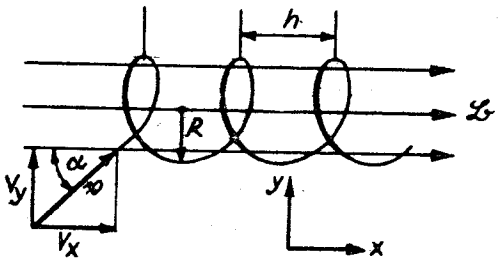


Bild 281
Schraubenlinienbahn im homogenen Magnetfeld

Bei beliebiger Eintrittsrichtung des Trägers in ein homogenes Magnetfeld ergibt die Überlagerung der unbeeinflußten Bewegung entsprechend der zu $\vec{B}$ parallelen Komponente von $\vec{v}$ (v_x in Bild 281) und der Kreisbewegung entsprechend der zu $\vec{B}$ senkrechten Komponente von $\vec{v}$ (v_y in Bild 281) als Bahn eine Schraubenlinie gemäß Bild 281.

Der Halbmesser R dieser Schraubenlinie wird bei Berücksichtigung von $v_y = v \sin \alpha$ nach Gl. (627)

$$R = \frac{mv}{qB} \sin \alpha = \sqrt{\frac{2m}{q}} \frac{\sqrt{U}}{B} \sin \alpha \,, \tag{628}$$

und die Ganghöhe h berechnet sich bei Beachtung von $v_x = v \cos \alpha$ mit der Umlaufzeit

$$T = \frac{2\pi R}{v_y} \tag{629}$$

zu

$$h = v_x T = 2\pi R \cot \alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{q}} \frac{\sqrt{U}}{B} \cos \alpha \tag{630}$$

Die Kreisbahnen von Elektronen im magnetischen Feld lassen sich experimentell sehr gut nachweisen, wenn man sogenannte Fadenstrahlen in das Feld eines Magneten bringt. Fadenstrahlen erhält man durch Zugabe eines geeigneten Gases (Edelgas) in den Entladungsraum, wobei durch Ionisation längs der Elektronenbahn eine geringe Menge positiver Ionen entstehen, die wegen ihrer großen Masse nur langsam seitwärts abdiffundieren und infolge ihrer Raumladung den Elektronenstrahl dauernd zusammenhalten. Die Elektronenbahn wird außerdem in ihrer gesamten Länge durch Anregung der Gasmolekeln sichtbar. Wie ein langsamer Elektronenstrahl in der Nähe der Pole eines Hufeisenmagneten verläuft, zeigt Bild 282.

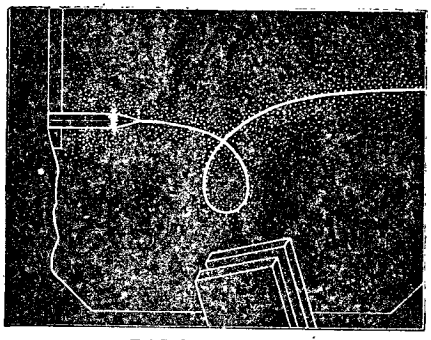


Bild 282
Fadenstrahl im Felde eines Hufeisenmagneten

3. Bahnkrümmung von Elektronen im Magnetfeld der Erde: Das Erdfeld hat in Mitteleuropa eine Induktion von der Größe

$$B \approx 0{,}47 \cdot 10^{-4} \frac{Vs}{m^2}$$

Nehmen wir eine Elektronengeschwindigkeit von

$$U = 100 \text{ eV}$$

an, so ergibt sich eine Bahnkrümmung, deren Halbmesser immerhin

$$R = \frac{3{,}38 \cdot 10^{-6} \sqrt{100}}{0{,}47 \cdot 10^{-4}} = 0{,}72 \text{ m}$$

beträgt. Für den Richtungssinn der Krümmung gelten folgende Überlegungen. Die Horizontalkomponente der Induktion $\mathfrak{B}$ weist nach dem geografischen Norden. Ferner gilt, da das Elektron Träger einer negativen Ladung ist, für die ablenkende Kraft

$$\mathfrak{F}_m = |q|\ (\mathfrak{B} \times \mathfrak{w})$$

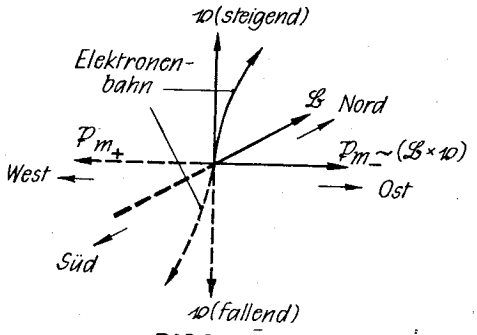


Bild 283
Abweichung von Elektronen im Magnetfeld

Bewegen sich nun die Elektronen senkrecht nach oben, so muß eine Abweichung nach Osten erfolgen. Bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung erfolgt dagegen eine Ablenkung nach Westen (Bild 283). Es gilt also die Regel:

Fallende Elektronen weichen nach Westen, steigende nach Osten aus.

Praktische Anwendung findet diese Regel bei dem trägheitslos arbeitenden Elektronen-Kompaß im Flugverkehr. Hier werden die Elektronen in einem Braunschen Rohr senkrecht nach oben auf den Leuchtschirm geschossen, so daß sie nach Osten abweichen. Bei entsprechender Eichung läßt sich dann die Flugrichtung vom Bildschirm ablesen.

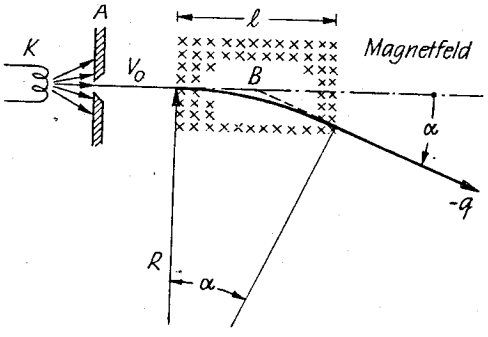


Bild 284
Ablenkung im homogenen Magnetfeld

4. Ablenkung im magnetischen Querfeld: Obgleich die Kraftwirkungen im elektrischen und magnetischen Feld wesentlich verschiedenen Gesetzen gehorchen, lassen sich beide Felder für viele Zwecke gleich gut verwenden. So kann beispielsweise die Ablenkung in einer Braunschen Röhre auch durch ein homogenes Magnetfeld (Querfeld) erfolgen. Die Ablenkung des Trägerstrahles im magnetischen Feld der Induktion B ergibt sich mit (627) für kleine α-Werte aus:

$$\tan \alpha \approx \frac{\ell}{R} = \frac{\ell q B}{m v} = \ell \sqrt{\frac{q}{2m}} \frac{B}{\sqrt{U}}, \qquad (631)$$

wobei ℓ die Länge des Feldbereiches (vgl. Bild 284) bedeutet. Da die Ablenkwinkel in technischen Röhren allgemein klein sind, kann man in 1. Näherung auch

$$\tan \alpha \approx \alpha$$

setzen.

Ein Vergleich der Gleichungen (624) und (631) zeigt, daß für die elektrische Ablenkung der Träger die kinetische Energie maßgebend ist, für die magnetische hingegen der Impuls.

5. Geschwindigkeitsanalyse. Schreibt man Gleichung (627a) in der Form

$$v = \frac{q}{m} RB ,$$

so erhellt die Möglichkeit, bei bekanntem q/m die Trägergeschwindigkeit v durch Ausmessen des Bahnradius im Magnetfeld zu ermitteln. Dieses Verfahren wird seit langem zur Impulsmessung von Korpuskelstrahlen aller Art (radioaktive Strahlen, kosmische Strahlen etc.) verwandt, wobei die gekrümmten Teilchenbahnen in der Wilsonkammer (s. Lehrbrief 11 dieser Reihe, S. 617) direkt sichtbar gemacht werden. Speziell zur Impulsmessung radioaktiver ß-Strahlen (= Elektronen sehr hoher Energie) wird die Anordnung nach Bild 285 benutzt, bei der durch eine schmale Spaltblende P ein enger Impulsbereich der Teilchen ausgesondert wird, der sich aus der Geometrie und dem Magnetfeld B berechnen läßt. Verschiebt man die Blendenlage oder verändert man B, so erhält man das Impuls- bzw. Geschwindigkeitsspektrum der ß-Strahlen.

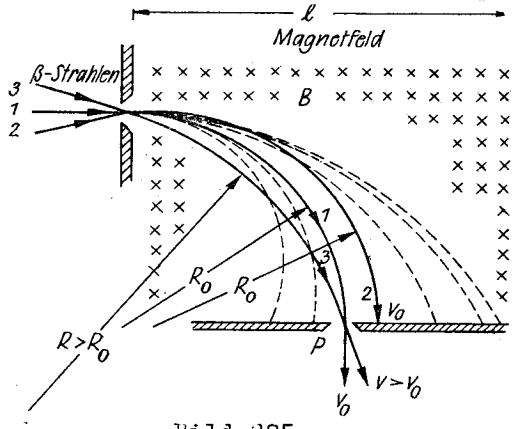


Bild 285
Ablenkung von ß-Strahlen im homogenen Magnetfeld

Nachteilig an der im Bild 285 gezeigten Anordnung ist, daß an der Blende P nur die Ladungsträger gesammelt werden, die außer einer homogenen Geschwindigkeit auch eine gleiche Strahlrichtung

beim Eintritt in das ablenkende Magnetfeld aufweisen (Bahn 1 in Bild 285). Dadurch geht bei einem gewissen Streuwinkel der Strahlrichtung mitunter eine erhebliche Anzahl von Teilchen des gewünschten Geschwindigkeitsbereiches für die Messung verloren (Bahn 2 in Bild 285). Andererseits können dann aber auch Teilchen, die von der mittleren Strahlrichtung abweichen, jedoch eine höhere Geschwindigkeit als v_0 haben, ebenfalls auf die Blende treffen (Bahn 3 in Bild 285).

Die genannten Nachteile lassen sich weitgehend beseitigen, wenn man die Ladungsträger im Magnetfeld nicht nur einen Viertelkreis wie in Bild 285, sondern einen Halbkreis gemäß Bild 286 durchlaufen läßt. Träger, die von einer Blende P (Bild 286a) mit gleicher Geschwindigkeit, aber verschiedenen Richtungen ausgehen, beschreiben eine Schar von Kreisen, die in der Nähe der Blende P' nur wenig voneinander abweichen. Diese Abweichung ist um so geringer,

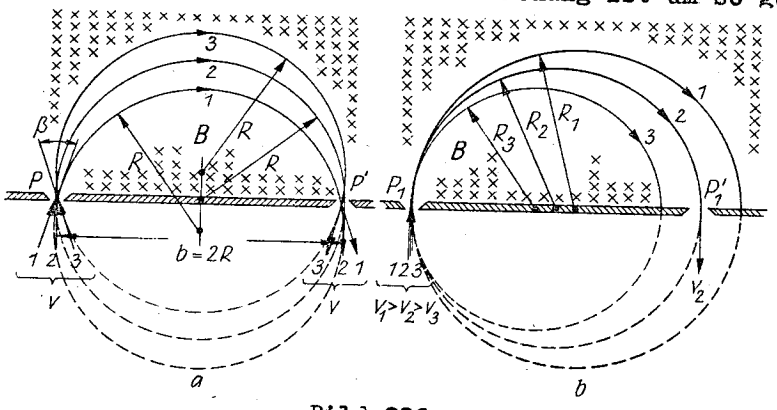


Bild 286
Sammelwirkung (a) und Dispersion (b)
eines homogenen Magnetfeldes

je enger der Öffnungswinkel β des von P ausgehenden Strahlenbündels, also dessen Richtungsstreuung ist. Träger gleicher Richtung, aber verschiedener Geschwindigkeiten weisen dagegen nach Durchlaufen des Halbkreises gerade die größte Abweichung (Dispersion) auf (Bild 286b). Man erreicht damit also, daß jetzt auch Teilchen gleicher Geschwindigkeit und verschiedener Richtung in P' gesammelt werden (Richtungsfokussierung). Die Auswahl der Geschwindigkeit kann durch Verstellen des Blendenabstandes b oder durch Veränderung des Magnetfeldes B erfolgen. Obwohl im praktischen

Fall verschiedener Richtung und Geschwindigkeit in P auch wieder Ladungsträger unterschiedlicher Geschwindigkeit in P' eintreffen können, ist ihre Zahl doch weitaus geringer als bei der Anordnung Bild 285.

6. Massenanalyse: Besonders wichtige Merkmale der magnetischen Ablenkung sind, daß diese im Gegensatz zur elektrischen Ablenkung mit der linearen Geschwindigkeit des Trägers abnimmt und ferner von der spezifischen Ladung q/m des Trägers abhängt. Schießt man also ein Trägergemisch, bestehend aus Teilchen verschiedener Masse, mit einer einheitlichen Geschwindigkeit v in ein homogenes Magnetfeld, so erfahren die leichten Teilchen gemäß (631) eine größere Ablenkung als die schweren. Auf diese Weise ist es also möglich, bei bekannter Ladung q durch die Messung von tg α oder R die Masse m (z.B. von einfach geladenen positiven Ionen) festzustellen bzw. die schweren von den leichten Teilchen zu trennen.
Auf diesem Prinzip beruht der sogenannte Massenspektrograph, mit dem die Atomgewichte von Isotopen sehr genau bestimmt werden können. Da die Geschwindigkeit von Ionen meistens auch nicht bekannt ist, muß diese gleichzeitig mit der Masse festgestellt werden. Man hat dieses Problem durch Kombinationen elektrischer und magnetischer Ablenkfelder gelöst. Einige in dieser Richtung entwickelte Massenspektrographen werden im nächsten Abschnitt besprochen.

[64] Der Massenspektrograph. Zur genaueren Bestimmung von Atomgewichten dient der Massenspektrograph, der von der Möglichkeit der Trennung von Massen in elektrischen oder magnetischen Feldern Gebrauch macht.
Die geeignete Kopplung beider Feldarten ist notwendig im Hinblick darauf, daß die Geschwindigkeiten der zu untersuchenden Teilchen im allgemeinen verschieden und nicht bekannt sind. Außerdem ist mit Rücksicht auf die Erfassung möglichst geringer Substanzmengen darauf zu achten, daß auch eine Richtungsfokussierung im Spektrographen erfolgt.
Die Kombination elektrischer und magnetischer Felder beliebiger Größe und Richtung bewirkt auf ein geladenes Teilchen (q) eine Kraft, die sich aus den Einzelkräften nach (619) und (626) zu

einer resultierenden Kraft zusammensetzt:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_m = q(\mathcal{E} + (\mathfrak{v} \times \mathfrak{B})) \qquad (632)$$

Diese Gl.(632)erlaubt grundsätzlich die Berechnung von Trägerbahnen mit beliebigen Anfangsbedingungen. Da jedoch die weitere Durchführung der Rechnung meist auf die größten mathematischen Schwierigkeiten stößt, ist die allgemeine Bahnberechnung noch nicht durchführbar. Wir werden auf einen Spezialfall (Einschußgeschwindigkeit, Magnetfeld und elektrisches Feld bilden ein rechtwinkliges Dreibein) noch später zurückkommen. Hier behandeln wir der historischen Entwicklung folgend die verschiedenen Konstruktionen von Massenspektrographen, soweit sie elementar verständlich sind.

1. Die Thomsonsche Parabelmethode: Elektrisches und magnetisches Feld sind einander parallel gerichtet und füllen denselben Raum aus (Bild 287). Ein senkrecht zur gemeinsamen Feldrichtung einfallender Trägerstrom - es handelt sich hier ausschließlich um positive Ionen, da die Massenbestimmung von Elektronen nicht interessiert - wird in zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen abgelenkt. Sein Auftreffpunkt auf dem Schirm A (Leuchtschirm oder Fotoplatte) besitzt demzufolge 2 im allgemeinen von 0 verschiedene Koordinaten x und y, von denen die erstere der elektrischen, die zweite der magnetischen Ablenkung entspricht.

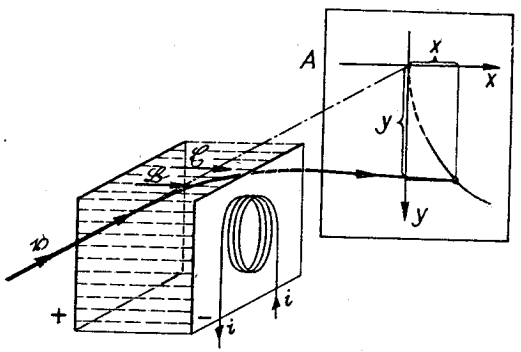


Bild 287
Zur Massenbestimmung nach der Parabelmethode

Hat der Träger die spezifische Ladung q/m und die Geschwindigkeit v_o, so ist nach Gl. 624

$$x = k_e \frac{q}{m} \frac{1}{v_o^2} \qquad (633)$$

und nach Gl. (631)

$$y = k_m \frac{q}{m} \frac{1}{v_o} \qquad (634)$$ [1]

Die Auftreffpunkte von Trägern mit gleichem q/m, aber verschiedenen Geschwindig-

1) Diese Gl. gilt nur für nicht zu große Ablenkungswinkel!

keiten v_0 liegen daher auf einer Kurve, deren Gleichung sich durch Eliminieren von v_0 aus (633) und (334) zu

$$y^2 = k \frac{q}{m} x \,, \qquad (635)$$

ergibt. Die Kurve ist also eine Parabel, die die in Bild 287 eingezeichnete Lage hat. Überdeckt die Trägergeschwindigkeit v nur einen kleineren Bereich, so ist bloß ein Teil der Parabel auf dem Schirm A sichtbar. Bild 288 zeigt als Beispiel einige so erhaltene Massenparabeln von Kohlenwasserstoffen.

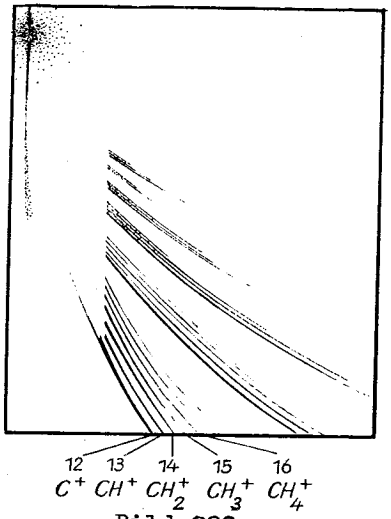


Bild 288
Massenparabeln von Kohlenwasserstoffen

Die Thomsonsche Methode der Massenparabeln hat den Nachteil, daß infolge des Auseinanderziehens der verschiedenen Geschwindigkeitswerte zu einer Parabel eine große Substanzmenge erforderlich ist, um ausreichende Schwärzung auf der fotografischen Platte zu erhalten. Vorteilhafter ist deshalb die von Aston angegebene Methode, nach der alle v-Werte durch geeignete Fokussierung der Strahlen auf einen Punkt konzentriert werden.

2. Der Astonsche Massenspektrograph:
Die Ablenkformeln für das elektrische und magnetische Feld (Gln. 624 und 631 lehren, daß das elektrische Feld die Ladungsträger im wesentlichen nach ihrer Energie $\frac{m}{2} v^2$, das magnetische Feld nach ihrem Impuls mv trennt. Auf diesem Prinzip beruht auch der Massenspektrograph nach Aston, der mit gekreuzten und räumlich getrennten Feldern arbeitet (Bild 289). Der Ionenstrahl, aus dem durch zwei Blenden P_1 und P_2 ein möglichst paralleles

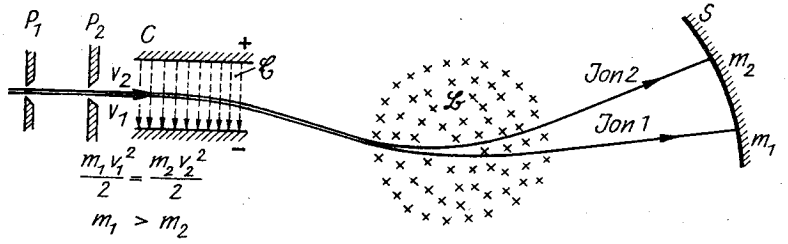


Bild 289
Schema des Massenspektrographen nach Aston

Bündel ausgeblendet ist, durchläuft nacheinander das elektrische Feld des Plattenkondensators C und das Magnetfeld der Induktion B. Der Kondensator trennt die Ionen nach ihrer Energie ($mv^2/2$), das Magnetfeld spaltet jeden dieser Strahlen nach den Impulsgrößen (mv) auf. Zwei Ionen verschiedener Masse m_1 und m_2 - wobei $m_1 > m_2$ sein soll -, die infolge ihrer gleichen Energie den Kondensator auf der in Bild 289 gezeigten Bahn verlassen, haben entsprechend verschiedene Geschwindigkeiten und daher auch verschiedene Impulse. Das Ion 1 wird also wegen seines größeren Impulses im Magnetfeld schwächer abgelenkt als Ion 2, so daß die beiden Ionen zu zwei verschiedenen Punkten der fotographischen Platte S (Bild 289) gelangen. Die früher besprochene Sammlung von Strahlen in etwas unterschiedlicher Richtung (Richtungsfokussierung) wird beim Astonschen Spektrographen durch Ausblendung eines möglichst engen Strahlenbündels an den beiden Blenden P_1 und P_2 umgangen.

3. Die Massenspektrographen von Mattauch, Herzog u.a.: Der Astonsche Massenspektrograph enthält zwar eine Fokussierung der Geschwindigkeiten, aber noch keine Fokussierung der Richtungen, so daß ein feines und daher intensitätsarmes Strahlenbündel ausgeblendet werden muß, um scharfe Abbildung des Massespektrums zu erhalten. Diesen Nachteil vermeiden die modernen Konstruktionen, bei denen durch besondere Feldkombinationen auch diejenigen Strahlen auf einen Punkt gesammelt werden, die zwar gleiches q/m, aber verschiedene Einfallsrichtungen besitzen. Die grundsätzlichen Möglichkeiten dafür werden wir erst in den weiter unten folgenden Überlegungen über Elektronen- und Ionenoptik kennen lernen, so daß wir uns hier mit diesem Hinweis begnügen wollen.

LÖSUNGEN

Lösungen zu den Übungsaufgaben des 1. und 2. Kapitels (Forts.)

4. Es besteht ein Dichtegradient $\frac{\partial n}{\partial x}$ in der x-Richtung. Wir betrachten eine Fläche der Größe $1m^2$, die senkrecht zur x-Achse an der Stelle x=0 steht (Bild 250). Der Dichtegradient ist laut Bild 250 positiv, d.h., rechts von x=0 ist die Gasdichte größer als links. Es muß dann - gleiche Temperatur auf beiden

Seiten der Fläche vorausgesetzt - entsprechend der früher abgeleiteten Formel (593) der durch die gedachte Fläche von rechts nach links tretende Teilchenstrom (Teilchenzahl je Zeit und Flächeneinheit) größer sein als der umgekehrt gerichtete. Die Differenz ergibt also einen Nettostrom in der Richtung von rechts nach links

$$Z = |\mathfrak{z}| = -\frac{1}{4}\,\bar{v}\,(n_r - n_\ell)$$

Bei linearem Dichteverlauf können wir setzen

$$n_r - n_\ell = \frac{\partial n}{\partial x}\,\Delta x$$

Man wird für Δx etwa die Größe einer mittleren freien Weglänge λ_m wählen, denn im Abstande λ_m hatten ja im Mittel alle Molekeln, die durch die Fläche bei $x = 0$ hindurchfliegen, ihren letzten Zusammenstoß.
Mit dieser Annahme, die jedoch nur im Interesse der Vereinfachung gemacht wurde, folgt dann für den Teilchenstrom

$$Z = -\frac{\bar{v}}{4}\frac{\partial n}{\partial x}\lambda_m = -\frac{\bar{v}\,\lambda_m}{4}\frac{\partial n}{\partial x} = -D\,\frac{\partial n}{\partial x}$$

Hierbei ist

$$D = \frac{\bar{v}\,\lambda_m}{4}$$

der für die Geschwindigkeit der Diffusion verantwortliche Diffusionskoeffizient und $\frac{\partial n}{\partial x}$ der Dichtegradient in x-Richtung.
Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{z} &= i\,Z_x + j\,Z_y + \mathfrak{k}\,Z_z \\ &= -D\,\left(i\,\frac{\partial n}{\partial x} + j\,\frac{\partial n}{\partial y} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial n}{\partial z}\right) \\ &= -D\ \mathrm{grad}\ n\end{aligned}$$

Eine genauere Analyse, die sich vor allem auf die besondere Form der Verteilungsfunktion der freien Weglänge bezieht, liefert im wesentlichen den gleichen Ausdruck für D, nur ist der Zahlenfaktor im Nenner etwas anders. Es wird nämlich

$$D = \frac{\bar{v}\ \lambda_m}{3} \qquad (636)$$

5. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt allgemein

$$W = \frac{\Delta N}{N}$$

Wir benutzen die bekannte Verteilungsfunktion (561) und schrei-

ben mit den vorgeschriebenen Integrationsgrenzen

$$W = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v^2}{v_m^3} e^{-(v/v_m)^2} dv$$

Setzen wir $v/v_m = x$ und entsprechend $dv = v_m dx$, so lautet das Integral

$$W = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} x^2 e^{-x^2} dx$$

Wir lösen zunächst durch partielle Integration

$$\int e^{-x^2} dx = xe^{-x^2} + 2 \int x^2 e^{-x^2} dx$$

und erhalten damit

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int e^{-x^2} dx - xe^{-x^2} \right\}$$

Führen wir noch das Gaußsche Fehlerintegral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx = \Phi(x)$$

ein, so lautet also die gesuchte Lösung

$$W = \Phi\left(\frac{v}{v_m}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{v}{v_m} e^{-(v/v_m)^2} \Bigg|_{v_1}^{v_2} \qquad (637)$$

a) Wir müssen zunächst v_m nach Gl. (566b) berechnen. Es gelten die Zahlenwerte

$T = 373^\circ K$, $m_{He} = 4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} Ws^3/m^2$, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} Ws/grad$

Damit wird

$$v_m = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} Ws/grad \cdot 373 \ grad}{4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \ Ws^3/m^2}} = 1250 \frac{m}{s}$$

Aus der Aufgabenstellung ergeben sich die Integrationsgrenzen

$$v_1 = 1000 \frac{m}{s} \quad \text{also} \quad \frac{v_1}{v_m} = \frac{1000}{1250} = 0{,}8$$

$$v_2 = \infty \quad \text{also} \quad \frac{v_2}{v_m} = \infty$$

Es ergeben sich, aus Tafeln zu entnehmen, die Gaußschen Fehlerintegrale $\Phi(0{,}8) = 0{,}742$ und $\Phi(\infty) = 1$, ferner wird $e^{-0{,}64} = 0{,}527$ und $e^{-\infty} = 0$, so daß wir schließlich ge-

mäß (637) die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhalten :

$$W = \Phi(\infty) - \Phi(0{,}8) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, 0{,}8 \cdot e^{-0{,}64} = \underline{0{,}734}$$

b) Die Integrationsgrenzen sind laut Aufgabe festgelegt zu

$$v_1 = 0 \quad \text{also} \quad \frac{v_1}{v_m} = 0$$

$$v_2 = \overline{v} \quad \text{also} \quad \frac{\overline{v}}{v_m} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1{,}13 \quad \text{(gemäß 566b/c)}$$

Damit wird nach (637) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in He bei 100°C die Molekelgeschwindigkeit kleiner ist als der statistische Mittelwert, gleich

$$W = \Phi(1{,}13) - \Phi(0) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 1{,}13 \cdot e^{-1{,}27} = 0{,}89 - 0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 1{,}13 \cdot 0{,}28$$

$\underline{W = 0{,}53}$

Anmerkung: Zur Lösung des eingangs aufgetretenen Integrals eignen sich ferner

a) Reihenentwicklung des Integranden $x^2 e^{-x^2}$ und gliedweise Integration oder
b) grafische Integration

6. Zunächst ist die mittlere freie Weglänge auf p = 760 Torr und T = 373°K umzurechnen. Es ist $\lambda \sim 1/n$, so daß wegen $p = n k T$ folgt:

$$\lambda \sim \frac{T}{p}$$

Wir können also setzen

$$\frac{\lambda}{\lambda_o} = \frac{T}{T_o}\,\frac{p_o}{p} = \frac{373^\circ K}{273^\circ K} \cdot \frac{1 \text{ Torr}}{760 \text{ Torr}} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$$

Da die mittlere freie Weglänge für 0°C und 1 Torr $\lambda_o = 4{,}83 \cdot 10^{-3}$ cm ist, gilt also

$$\lambda = \lambda_o \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3} = 8{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Stoß zwischen x und x+dx erfolgt, ist nun

$$W(x)dx = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx \qquad \text{oder} \qquad W(x)dx = e^{-y} dy \,,$$

wenn wir $y = x/\lambda$ setzen. Mit den Grenzen

$$y_1 = \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ cm}}{8{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ cm}} = 0{,}575 \,, \qquad y_2 = \frac{6 \cdot 10^{-6} \text{ cm}}{8{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ cm}} = 0{,}69$$

gibt dann die Integration

$$\Delta W = \int_{y_1}^{y_2} e^{-y} dy = e^{-y_1} - e^{-y_2} = 0{,}563 - 0{,}501 = \underline{0{,}062}$$

7. Nach De Broglie ist

$$\lambda = \frac{h}{m\bar{v}}$$

oder, wenn wir für $\bar{v}$ Gl. (566c) einsetzen,

$$\lambda = \frac{h\sqrt{\pi}}{\sqrt{8 k T m}}$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich also

$$\lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Ws^2}\ \sqrt{\pi}}{\sqrt{8 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{Ws/grad} \cdot 300\ \mathrm{grad} \cdot 0{,}91 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{Ws^3/cm^2}}}$$

$$\underline{\lambda = 6{,}74 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{cm}}$$

8. a) Entartungskriterium war

$$\lambda \approx \delta$$

Es gilt

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \text{und} \quad \delta = n^{-1/3}$$

Mit Gl. (566a) wird also

$$\frac{h}{\sqrt{3 k T m}} = n^{-1/3} \qquad 1)$$

und

$$\boxed{T = \frac{h^2 n^{2/3}}{3 m k}} \qquad (638)$$

Bestimmung der Dichte n des Elektronengases in Cu:

Mit $\gamma_{Cu} = 8900\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$ und $A = 63{,}6$ wird

$$n = \frac{\gamma}{A\, m_H} = \frac{8900\ \mathrm{kg\ m^{-3}}}{63{,}6 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}$$

$$= 0{,}84 \cdot 10^{29}\ \mathrm{m^{-3}} = 8{,}4 \cdot 10^{22}\ \mathrm{cm^{-3}}$$

Bestimmung der Entartungstemperatur T des Elektronengases in Cu:

Mit $m = 0{,}91 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg} = 0{,}91 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{Ws^3\ m^{-2}}$

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{Ws\ grad^{-1}}$

$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Ws^2}$

---

1) Hier ist für v der Effektivwert gesetzt. Da es sich nur um eine rohe Abschätzung der Größenordnung handelt, ist die Wahl von v - ob Mittelwert, Effektivwert oder wahrscheinlicher Wert - belanglos.

wird

$$T = \frac{43{,}6 \cdot 10^{-68}\ W^2\ s^4 \cdot 19{,}2 \cdot 10^{18}\ m^{-2}}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} Ws\ grad^{-1} \cdot 0{,}91 \cdot 10^{-30} Ws^3 m^{-2}} = \underline{22 \cdot 10^4\ {}^oK}$$

b) Nach Avogadro gilt für die Dichte eines Gases bei Normalbedingungen (273 ^oK, 760 mm Hg)

$$n_o = 2{,}7 \cdot 10^{25}\ m^{-3}$$

Für p = konst. folgt aus (560)

$$V \sim T, \text{ also } n \sim \frac{1}{T},$$

so daß sich für die Dichte des Gases bei beliebiger Temperatur T

$$\frac{n_T}{n_o} = \frac{T_o}{T} \quad \text{oder} \quad n_T = n_o \frac{T_o}{T} = n_o \frac{273\ {}^oK}{T}$$

ergibt. Mit (638) errechnet sich dann die <u>Entartungstemperatur T von He bei p = 1 atm</u> zu

$$T = \frac{h^2 n_T^{2/3}}{3m k} = \frac{h^2 (273^o \cdot n_o)^{2/3}}{3m_{He} k T^{2/3}} \text{ oder } T^{5/3} = \frac{h^2 (273 \cdot n_o)^{2/3}}{3m_{He} k}$$

Mit den entsprechenden Zahlenwerten ($m_{He} = 4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} Ws^3/m^2$) wird also

$$T = \left[\frac{43{,}6 \cdot 10^{-68} W^2 s^4\ (273 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{25})^{2/3} grad^{2/3} m^{-2}}{3 \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-27}\ Ws^3/m^2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ Ws/grad} \right]^{3/5}$$

$$\underline{T = (6{,}1)^{3/5}\ {}^oK = 2{,}96\ {}^oK}$$

c) Ausgehend von Gl. (638) wird

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{2/3}, \qquad (639)$$

wobei T_1 die Entartungstemperatur von He bei $p_1 = 1$ atm (vgl. Aufg. 8b) und T_2 die gesuchte Entartungstemperatur bei $p_2 = 5000$ atm ist. Nach (560) gilt für den Zusammenhang der Dichte mit dem Druck die Proportion

$$V \sim \frac{T}{P} \sim \frac{1}{n},$$

und es folgt

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{T_1}{T_2} \frac{p_2}{p_1}$$

Dies in (639) eingesetzt, gibt dann

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{5/3} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/3}$$

oder

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/5}$$

Mit den Zahlenwerten erhalten wir also

$$T_2 = 2{,}96\ ^\circ\mathrm{K}\ (5 \cdot 10^3)^{2/5} = 90^\circ\mathrm{K}$$

9. Nach Fermi ist die Anzahl der Elektronen je m^3, die bei $T = 0\ ^\circ\mathrm{K}$ eine Energie zwischen ε und $\varepsilon+d\varepsilon$ haben, gleich

$$n(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{8\sqrt{2}\,\pi\, m^{3/2}}{h^3}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon$$

Die gesamte Nullpunktsenergie W umfaßt alle Elektronenenergien zwischen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \mu$, so daß gilt

$$W = \int_0^{\mu} n(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon = \frac{8\sqrt{2}\,\pi\, m^{3/2}}{h^3}\int_0^{\mu} e^{3/2} d\varepsilon$$

Setzen wir für die Grenzenergie μ den Ausdruck (581), so gibt die Integration

$$W = \frac{8\sqrt{2}\,\pi\, m^{3/2}}{h^3}\,\frac{2}{5}\mu^{5/2} = \frac{2 \cdot 8\sqrt{2}\,\pi\, m^{3/2}}{5\,h^3}\mu^{3/2}\cdot\mu$$

$$= \frac{2 \cdot 8\sqrt{2}\,\pi\, m^{3/2}}{5\,h^3}\,\frac{h^3 \cdot 3n}{8^{3/2}\, m^{3/2}\,\pi}\mu = \frac{3}{5}\,n\,\mu$$

Wir wissen nun, daß bei Metallen pro Volumeneinheit

$\|$ Zahl der Atome = Zahl der Elektronen n

ist. Mit der Wichte $\gamma = 980\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$ und dem Atomgewicht A = 23 ergibt sich damit für Na je Volumeneinheit eine Elektronenzahl

$$n = \frac{980\ \mathrm{kg\ m^{-3}}}{23 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}} = 25{,}6 \cdot 10^{27}\ \mathrm{m^{-3}}$$

Damit berechnet sich die Grenzenergie zu

$$\mu = \frac{44 \cdot 10^{-68}\ \mathrm{W^2 s^4} \cdot 3^{2/3} \cdot 25{,}6^{2/3} \cdot 10^{18}\ \mathrm{m^{-2}}}{8^{2/3} \cdot 1{,}82 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{Ws^3/m^2}\ \pi^{2/3}} = 5{,}08 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{Ws},$$

und die Nullpunktenergie des Elektronengases in Natrium wird je Raumeinheit

$$W = \frac{3}{5} \cdot 25{,}6 \cdot 10^{27}\ \mathrm{m^{-3}} \cdot 5{,}08 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{Ws} = \underline{7{,}8 \cdot 10^9\ \mathrm{Ws/m^3}}$$

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

3. Kapitel: Stromleitung im Hochvakuum 471

58 Einführung 471
59 Der Austritt von Elektronen aus Metallen und Oxyden. 471

1. Thermische Elektronenemission (Glühkatode) 471
2. Feldemission ("Kalte" Emission) 482
3. Lichtelektrische Elektronenemission 488
4. Sekundärelektronen-Emission 495

60 Das Elektronengas im Hochvakuum 502

1. Die Existenz eines freien Elektronengases 502
2. Die Temperatur des freien Elektronengases 503
3. Elektronendichte und Geschwindigkeitsverteilung . 503
4. Der Anlaufstrom 504

61 Mechanismus der Stromleitung im Hochvakuum 506

1. Zeitlicher Zusammenhang zwischen Trägerbewegung und Strom 506
2. Stromschwankungserscheinungen 508

62 Trägerbewegung in elektrischen Feldern 510

1. Kraft, Geschwindigkeit, Energie 511
2. Bewegung von Trägern im homogenen elektrischen Feld 512
3. Ablenkung von Elektronenstrahlen im Plattenkondensator 513
4. Energieumsatz in elektrischen Feldern 514

63 Trägerbewegung in magnetischen Feldern 515

1. Kraft, Bahnkrümmung, Energie 515
2. Bewegung von Trägern im homogenen Magnetfeld 515
3. Bahnkrümmung von Elektronen im Magnetfeld der Erde 517
4. Ablenkung im magnetischen Querfeld 518
5. Geschwindigkeitsanalyse 519
6. Massenanalyse 521

64 Der Massenspektrograph 521

1. Die Thomsonsche Parabelmethode 522
2. Der Astonsche Massenspektrograph 523
3. Die Massenspektrographen von Mattauch, Herzog u.a. 524

Lösungen 524